Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Anfangsgründe

der

geometrischen Disciplinen

für

Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen,

sowie auch

zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Großh. badisch. Hofrath und Ritter des Zähringer Löwenordens, Professor der Physik an der Universität zu Freiburg im Breisgau, der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft Ehrenmitglied und correspondirendes Mitglied mehrer anderer gelehrten Gesellschaften.

In drei Theilen.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.

Erster Theil:

Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1869.

Elemente

der

ebenen Geometrie und Stereometrie.

Für

Schulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Großh. badisch. Hofrath und Ritter des Zähringer Löwenordens, Professor der Physik an der Universität zu Freiburg im Breisgau, der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft Ehrenmitglied und correspondirendes Mitglied mehrer anderer gelehrten Gesellschaften.

Mit 143 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1869.

Vorrede.

Als ich im Jahre 1838 die erste Auflage dieses Büchleins, welches nun zum dritten male erscheint, ausarbeitete, war ich noch Lehrer an der Realschule in Gießen. In dieser Stellung fühlte ich das dringende Bedürfniß, den geometrischen Unterricht nicht nur anschaulicher zu machen, sondern auch beim Schüler mehr Interesse für die Sache zu erwecken, als dies bei der gewöhnlichen trocknen Demonstration von Lehrsätzen und Beweisen geschieht. Um dieses Ziel zu erreichen, schien es mir durchaus nöthig, die Selbstthätigkeit des Schülers möglichst in Anspruch zu nehmen, und das war nur durch Einführung zweckmäßiger Uebungsbeispiele möglich. Durch die Construction der Figuren, wie sie das Büchlein vom Schüler verlangt, soll das Verständniß der Lehrsätze und Beweise vermittelt und erleichtert, durch Beispiele soll das Begriffene so eingeübt werden, daß es als geistiges Eigenthum des Schülers betrachtet werden kann. Auf diese Weise habe ich, und zwar wie ich glaube mit Erfolg, gestrebt, dem geometrischen Unterricht wenigstens theilweise die Vortheile zu sichern, welche der algebraische Unterricht schon lange aus der zahlreichen Anwendung von Uebungsbeispielen gezogen hat.

Die vorliegenden „Elemente" sind sowohl für den Schul= als auch für den Selbstunterricht bestimmt. In letzterm Falle bieten namentlich die zahlreichen Constructions= und Rechnungsbeispiele dem Leser einen Prüfstein für die Richtigkeit seines Verständnisses.

Die erste Auflage dieses Werkchens behandelte nur die ebene Geometrie. Die nothwendigsten Grundlehren der Stereometrie sind erst in der zweiten Auflage hinzugekommen.

Die Tendenz des Werkchens ist vorzugsweise eine pädagogische und es ist lediglich für den Elementarunterricht bestimmt; ich bin weit entfernt, demselben eine Bedeutung für tiefer gehende mathematische Studien vindiciren zu wollen, was ich hier ausdrücklich hervorhebe, um zu vermeiden, daß man bei Beurtheilung desselben einen unrichtigen Maaßstab anlege, wie dies bei der zweiten Auflage in der That geschehen ist.

Zur Ausführung der Constructionsfiguren ist ein Transporteur und ein Maaßstab nöthig. Um eine besondere Anschaffung derselben entbehrlich zu machen, sind diesen „Elementen der ebenen Geometrie und Stereometrie" Abdrücke eines Transporteurs und einer Maaßstabstafel auf stärkerm Papier beigegeben worden.

Freiburg, im Juli 1869.

J. Müller.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Buch.

Ebene Geometrie.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Von den Winkeln.

Zweites Kapitel.

Vom Dreieck.

Drittes Kapitel.

Vom Viereck.

Viertes Kapitel.

Von den Vielecken.

Fünftes Kapitel.

Vom Kreise.

Sechstes Kapitel.

Berechnung des Flächeninhalts geradliniger ebener Figuren.

Siebentes Kapitel.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

Achtes Kapitel.

Berechnung des Kreisumfanges und des Kreisinhaltes.

Zweites Buch.

Stereometrie.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Berechnung der Körperoberflächen.

Zweites Kapitel.

Berechnung des körperlichen Inhalts.

Erstes Buch.

Ebene Geometrie.

Einleitung.

Körper, Flächen und Linien. Die Geometrie beschäftigt sich mit den Raumgrößen. Der Raum ist an und für sich unendlich, und nach allen Richtungen hin ausgedehnt. 1

Ein begränzter Raum heißt Körper. (Unterschied zwischen einem mathematischen und physischen Körper.)

Die Körper sind durch Flächen, die Flächen durch Linien, die Linien durch Punkte begränzt.

Durch Bewegung eines Punktes entsteht eine Linie, durch Bewegung der Linie eine Fläche, durch Bewegung der Fläche ein Körper.

Der Punkt hat gar keine Ausdehnung. Die Linie hat nur eine Ausdehnung, nämlich Länge. (Sind die mit Bleistift auf Papier gezogenen Linien wirkliche mathematische Linien?) Die Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite. Der Körper hat drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe.

Wenn sich ein Punkt stets nach derselben Richtung bewegt, so beschreibt er eine gerade Linie.

Die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten.

Durch zwei Punkte ist die Länge und die Richtung einer geraden Linie vollständig bestimmt.

Wenn die Richtung, nach welcher sich ein Punkt bewegt, eine stetige Aenderung erfährt, so beschreibt er eine krumme Linie. Es giebt unzählige Arten von krummen Linien.

Zwischen zwei Punkten lassen sich unzählig viele krumme Linien ziehen.

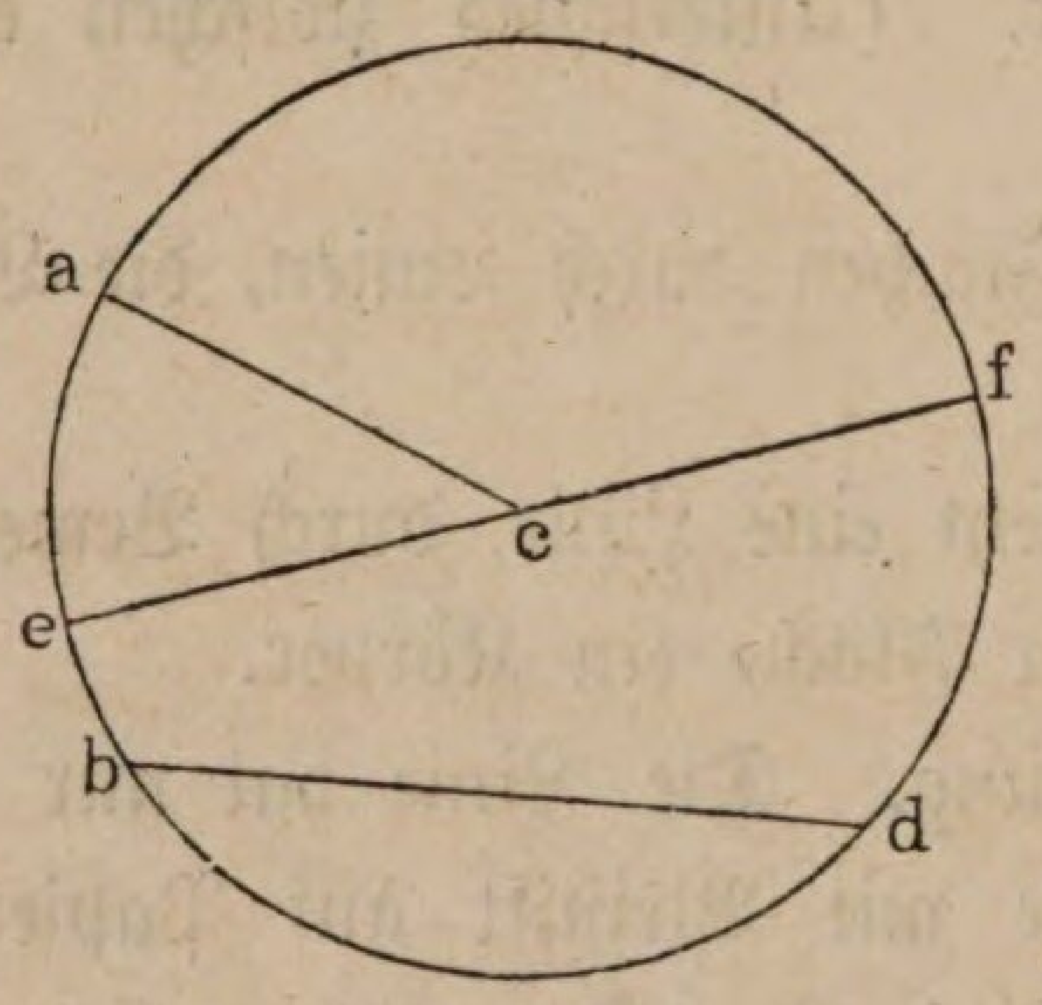
Wie man die Linien in gerade und krumme eintheilt, so theilt man die Flächen in ebene und krumme. Wenn man in einer Fläche irgend zwei Punkte bestimmt hat, so kann man sie stets durch eine gerade Linie verbunden denken. Fällt nun diese gerade Linie stets mit der Fläche zusammen, wie man auch die Punkte wählen mag, so ist die Fläche eine ebene, ist dies nicht der Fall, so ist sie eine krumme.

2 **Ebene Figuren.** Eine durch gerade oder krumme Linien begränzte ebene Fläche heißt eine ebene Figur. Die ebene Geometrie beschäftigt sich nur mit der Betrachtung ebener Figuren.

Alle durch gerade Linien begränzte ebene Figuren kann man mit dem gemeinschaftlichen Namen Vielecke bezeichnen. Nach der Anzahl der Gränzlinien nennt man sie Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w.

Unter den durch krumme Linien gebildeten ebenen Figuren kann in der Elementargeometrie nur der Kreis betrachtet werden. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche die Eigenschaft hat, daß es in demselben einen Punkt c (Fig. 1) giebt, welcher gleich weit von allen Punkten der krummen Begränzungslinie entfernt ist. Dieser Punkt heißt Mittelpunkt oder Centrum.

Fig. 1.



Jede vom Centrum nach der Begränzungslinie gezogene Gerade, wie ac, heißt Halbmesser oder Radius. Alle Radien desselben Kreises sind einander gleich.

Die krumme Begränzungslinie heißt Peripherie, Kreislinie; bisweilen wird sie auch bloß mit dem Namen Kreis bezeichnet. Aus dem Zusammenhange ergiebt sich leicht, ob mit dem Worte „Kreis" die Peripherie, oder die von der Peripherie begränzte Fläche gemeint sei.

Eine gerade Linie, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, wie bd, heißt Sehne oder Chorde. Eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Sehne, wie ef, heißt Diameter oder Durchmesser. Der Durchmesser ist doppelt so lang, als ein Radius.

3 **Längenmaasse.** Eine gerade Linie messen, heißt sehen, wie oft eine Linie von bekannter Länge in ihr enthalten ist. Diese bekannte Länge

nennt man das Maaß. Ein Lineal, ein Stab, ein Stück Papier u. s. w., auf welchem man solche Maaße aufgetragen hat, heißt Maaßstab.

Die älteren Längenmaaße sind fast alle den Dimensionen verschiedener Theile des menschlichen Körpers entnommen (Fuß, Zoll u. s. w.). Da nun aber die Körperdimensionen von einem Individuum zum andern sehr schwankend sind, so ist die Einheit der älteren Längenmaaße mehr oder weniger willkürlich festgestellt worden, was schon daraus hervorgeht, daß sie sich von einem Lande zum andern nicht unbedeutend ändert.

Eine Längeneinheit ist nur dann wissenschaftlich festgestellt, wenn sie entweder, wie beim neueren französischen Maaßsystem einer unveränderlichen Größe der Natur entnommen oder wenn wenigstens ihr Verhältniß zu einer solchen festgestellt ist.

Die Einheit des neufranzösischen Maaßsystems ist gewissermaßen der Umfang eines größten Kreises, welchen man sich auf der Erdoberfläche durch die beiden Pole der Erde gezogen denken kann. Denkt man sich die Peripherie dieses Kreises in 40 Millionen gleiche Theile getheilt, so ist die Länge eines solchen Theiles ein Meter, oder auch mit anderen Worten das Meter ist der 10 millionste Theil eines Erdmeridian-Quadranten (d. h. des Bogens von einem Punkte des Erdäquators zu einem der Pole).

Auf welche Weise die Länge des Meters ermittelt werden konnte, wird weiter unten im Kapitel von der Aehnlichkeit der Dreiecke erläutert werden.

Die Unterabtheilungen des Meters sind

das Decimeter = $^1/_{10}$ Meter,
das Centimeter = $^1/_{100}$ Meter,
das Millimeter = $^1/_{1000}$ Meter.

Ferner bilden

10 Meter ein Dekameter,
100 „ „ Hectometer,
1000 „ „ Kilometer,
10000 „ „ Myriameter.

Die Bezeichnungen der Unterabtheilungen des Meters sind durch Vorsetzen lateinischer, die der Vielfachen eines Meters sind durch Vorsetzen griechischer Zahlwörter gebildet.

Auf der der Seite 6 gegenüberstehenden Tafel sind mehrere Maaßstäbe zusammengestellt, und zwar ist der oberste ein Centimetermaaßstab. Das äußerste Centimeter links ist noch in 10 Millimeter getheilt.

Die Fußmaaße mehrerer Länder (Schweiz, Baden, Hessen) sind von dem französischen Metermaaße abgeleitet; so ist z. B. ein badischer oder schweizerischer Fuß gleich 3 Decimetern. Da nun ferner dieser Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien getheilt ist, so ist:

1 bad. oder schweiz. Fuß	=	0,3	Meter	=	3 Decimeter,
1 „ „ „ Zoll	=	0,03	„	=	3 Centimeter,
1 „ „ „ Linie	=	0,003	„	=	3 Millimeter,

wie es sich auch aus Vergleichung des obersten und untersten Maaßstabes der Maaßtafel ergiebt.

Bei sämmtlichen älteren Fußmaaßen ist der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien eingetheilt, und deshalb werden sie durch den Namen der Duodecimalmaaße von den neueren Decimalmaaßen unterschieden.

In der folgenden Tabelle ist das Größenverhältniß einiger älterer Fußmaaße zum Metermaaß bis auf 5 Decimalstellen genau angegeben.

1 sächsischer Fuß	=	0,28319	Meter
1 würtembergischer Fuß . .	=	0,28649	„
1 bayrischer Fuß	=	0,29186	„
1 englischer (russischer) Fuß .	=	0,30479	„
1 rheinländ. oder preuß. Fuß	=	0,31385	„
1 österreichischer Fuß . . .	=	0,31610	„
1 pariser Fuß	=	0,32484	„

Nach diesen Angaben berechne der Schüler, wie viel Millimeter 1 preußischer, 1 pariser u. s. w. Zoll enthält, und vergleiche die Resultate mit der Maaßstabstabelle auf gegenüberstehender Seite.

Aufgaben.

6′ 7″ 3‴ altes pariser Maaß — wie viel nach Metermaaß, wie viel nach englischem Maaß u. s. w.?

72,38 Meter — wie viel Fuß, Zoll und Linien nach preußischem, altem französischen u. s. w. Maaß?

Größere Längenmaaße sind:

1 Toise	=	6 pariser Fuß,
1 Faden	=	6 englische Fuß,
1 preußische Ruthe	=	12 preußische Fuß,
1 österreichisches Klafter . .	=	6 österreichische Fuß,
1 badische Ruthe	=	10 badische Fuß.

Vergleichende Tafel der Längenmaaſse.



Sechs braunschweigische Zoll sind nur um ein Millimeter grösser als sechs sächsische. Der bairische Fuss ist nur um $^{2}/_{10}$ Millimeter grösser als der hannöversche, weshalb man den bairischen und hannöverschen Zoll ohne merklichen Fehler als gleich annehmen kann.

Die wichtigsten Meilenmaaße sind:

1 deutsche oder geographische Meile	=	22842	par.	Fuß,
1 englische Landmeile	=	4957	„	„
1 „ Seemeile	=	5710	„	„
1 russische Werst	=	3285	„	„
1 griechisches Stadium	=	571	„	„

Das Metermaaß findet immer mehr Verbreitung. Die von den Schneidern allgemein angewandten Bandmaaße sind in Centimeter eingetheilt. Die Einführung des Metermaaßes in Preußen ist auf das Jahr 1870 festgesetzt; auch in der Schweiz steht dieselbe bevor.

Ein wesentlicher Vortheil des neuen französischen Maaßsystems besteht darin, daß nicht allein die Hohlmaaße (1 Liter = 1 Kubikdecimeter), sondern auch die Gewichte (1 Kubikcentimeter Wasser wiegt 1 Gramm) in einfacher Weise mit dem Längenmaaß in Zusammenhang stehen.

Erstes Kapitel.

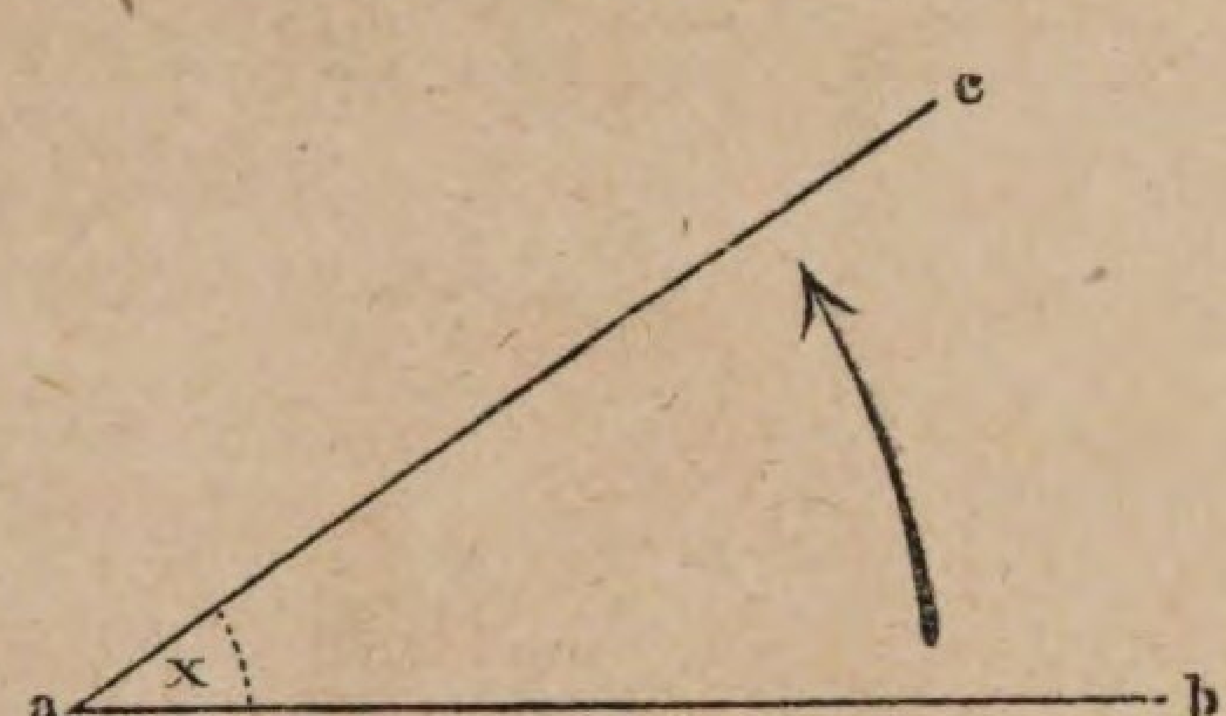
Von den Winkeln.

4 **Definition und Eintheilung der Winkel.** Durch einen Punkt können unzählig viele gerade Linien gezogen werden, welche sämmtlich verschiedene Richtungen haben.

Durch einen Punkt können keine zwei gerade Linien gezogen werden, welche gleiche Richtung haben.

Wenn zwei gerade Linien *ab* und *ac* (Fig. 2) durch einen und denselben Punkt *a* gehen, so kann man sich die eine von beiden Linien, z. B. *ab*, um den Pnnkt *a* in der Ebene der Figur so weit gedreht (geschwenkt) denken, bis sie mit *ac* zusammenfällt. Die Größe der Drehung nun, welche nöthig ist, um die Linie *ab* in die Lage *ac* zu bringen, nennt man Winkel. Da die Größe der Drehung von der Länge der Linien *ab* und *ac* unabhängig ist, so ändert sich auch die Größe des Winkels nicht, man mag die den Winkel bildenden Linien *ab* und *ac* noch so sehr verlängern oder verkürzen.

Fig. 2.



Die beiden den Winkel bildenden Geraden heißen Schenkel, der beiden Schenkeln gemeinschaftliche Punkt Scheitel des Winkels. Man benennt einen Winkel auf zweierlei Weise. Erstens: mittelst der drei Buchstaben, welche die Endpunkte der beiden Schenkel bezeichnen, wobei aber immer der Buchstabe in die Mitte zu setzen ist, der an dem Scheitel steht; so heißt z. B. der Winkel in obenstehender Figur *bac* oder *cab*. Zweitens: durch einen einzigen Buchstaben, welchen man zwischen die Schenkel des Winkels setzt; so ist z. B. der Winkel in der Figur durch den Buchstaben x bezeichnet.

Man kann sich die Linie *ab* (Fig. 3) in einer Ebene so weit um den Punkt *a* herumgedreht denken, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt. Hat man sie nur um den vierten Theil der ganzen Um=

drehung gedreht, so kommt sie in die Lage *ac*. Dreht man sie von der Lage *ac* aus abermals um eine Viertelumdrehung, so kommt sie in die Lage *ad*, d. h. in die Verlängerung der ursprünglichen Lage *ab*. Winkel wie *cab* und *cad*, deren jeder ein Viertel der ganzen Umdrehung beträgt, heißen **rechte Winkel**.

Fig. 3.

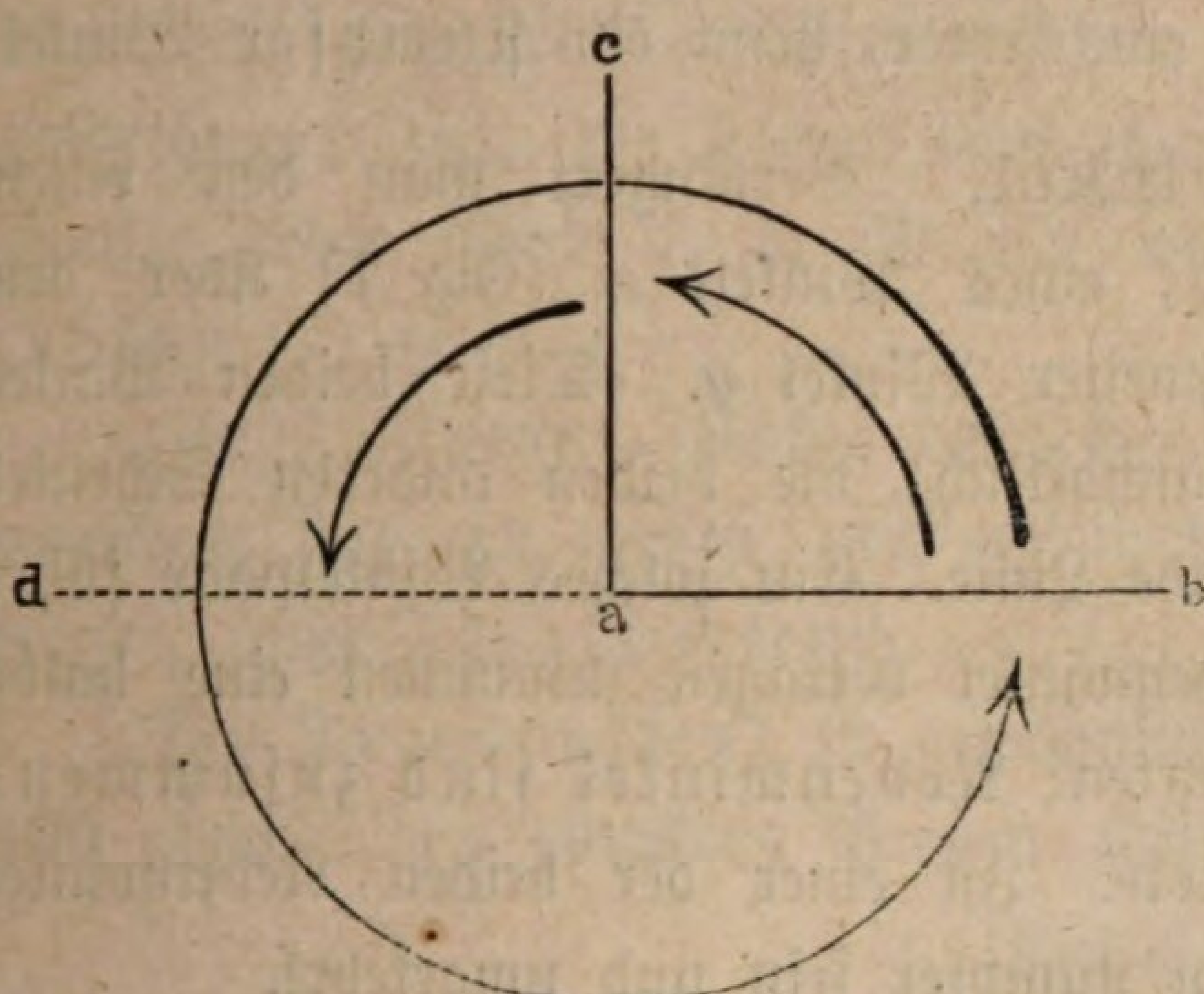


Fig. 4.

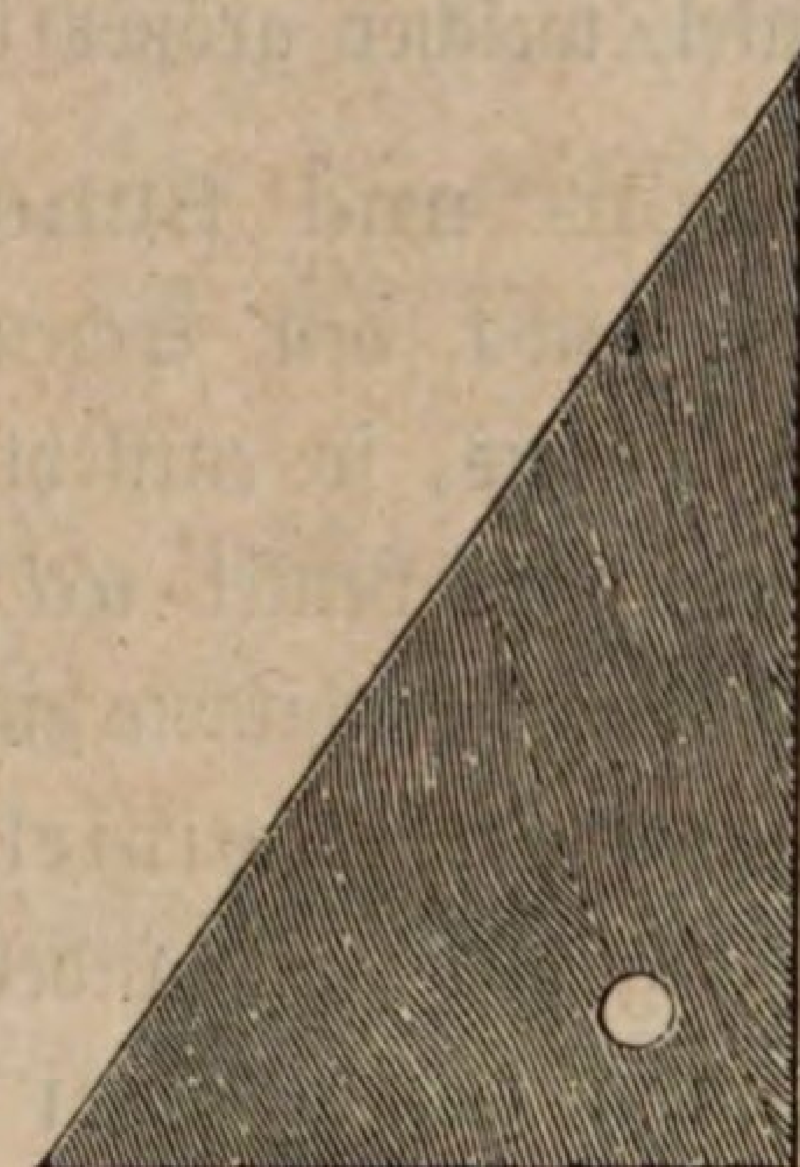


Fig. 5.

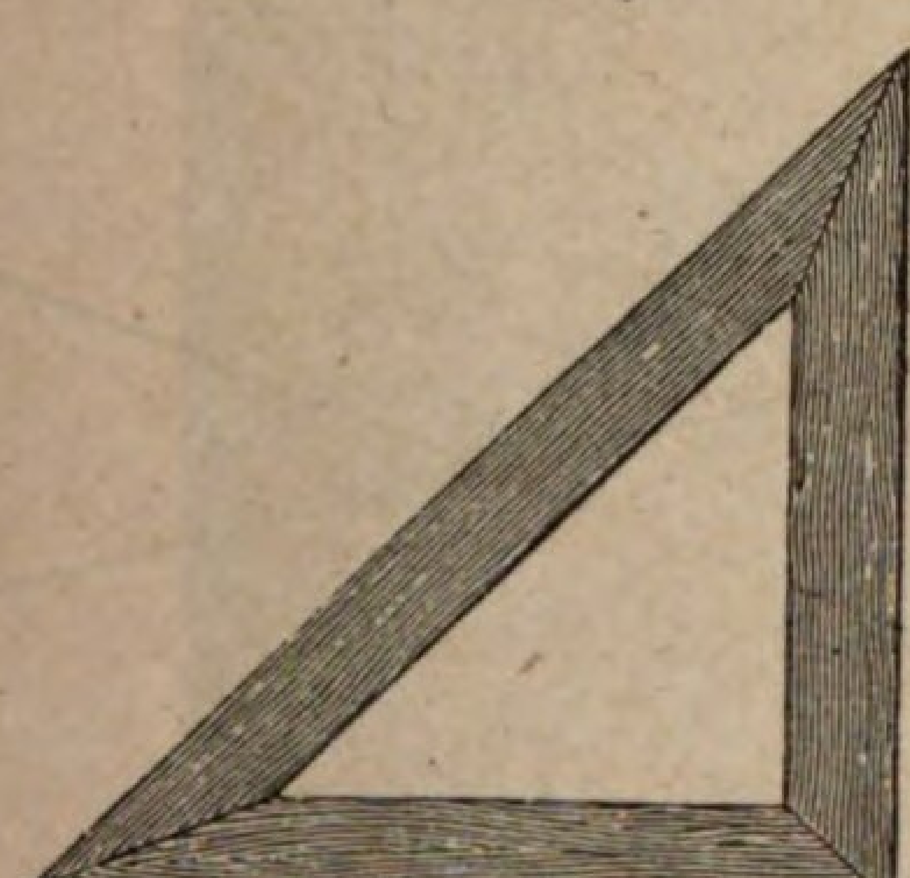


Fig. 6.



Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Eine gerade Linie, welche auf einer anderen rechtwinkelig steht, heißt ein **Perpendikel**.

Jede Linie, welche rechtwinkelig steht auf der freien Oberfläche des Wassers in einem ruhig stehenden Gefäße wird eine **Vertikale** oder **Senkrechte** genannt. Die Senkrechte ist die Richtung des **Bleiloths**, d. h. der Gleichgewichtslage einer Schnur, an welcher ein schwerer Körper angehängt ist.

Die Richtung einer jeden Linie, welche rechtwinkelig auf einer senkrechten steht, wird **wagerecht** oder **horizontal** genannt.

Das einfachste Mittel, dessen man sich bedienen kann, um rechte Winkel zu zeichnen oder auf einer gegebenen geraden Linie ein Perpen-

dikel zu errichten, ist der sogenannte rechte Winkel, d. h. ein gewöhnlich von Holz ausgeführtes rechtwinkeliges Dreieck, wie deren in Fig. 4 und in Fig. 5 (a. v. S.) dargestellt sind. Metallene (meist eiserne) rechte Winkel von der Form Fig. 6 (a. v. S.) werden Winkelhaken genannt.

Ein jeder Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, heißt ein spitzer; ein Winkel, welcher größer ist als ein rechter, heißt ein stumpfer Winkel.

5 **Neben- und Scheitelwinkel.** Verlängert man den einen Schenkel, etwa den Schenkel ab, eines Winkels x (Fig 7) über den Scheitel hinaus, so entsteht ein zweiter Winkel y. Diese beiden Winkel haben einen Schenkel ad gemeinschaftlich, die beiden anderen Schenkel ab und ac aber bilden eine gerade Linie. Ein solches Winkelpaar führt den Namen Nebenwinkel. Nebenwinkel betragen zusammen eine halbe Umdrehung oder mit anderen Worten: Nebenwinkel sind zusammengenommen gleich zwei Rechten. Ist einer der beiden Nebenwinkel ein spitzer, so muß der andere ein stumpfer sein und umgekehrt.

Fig. 7.

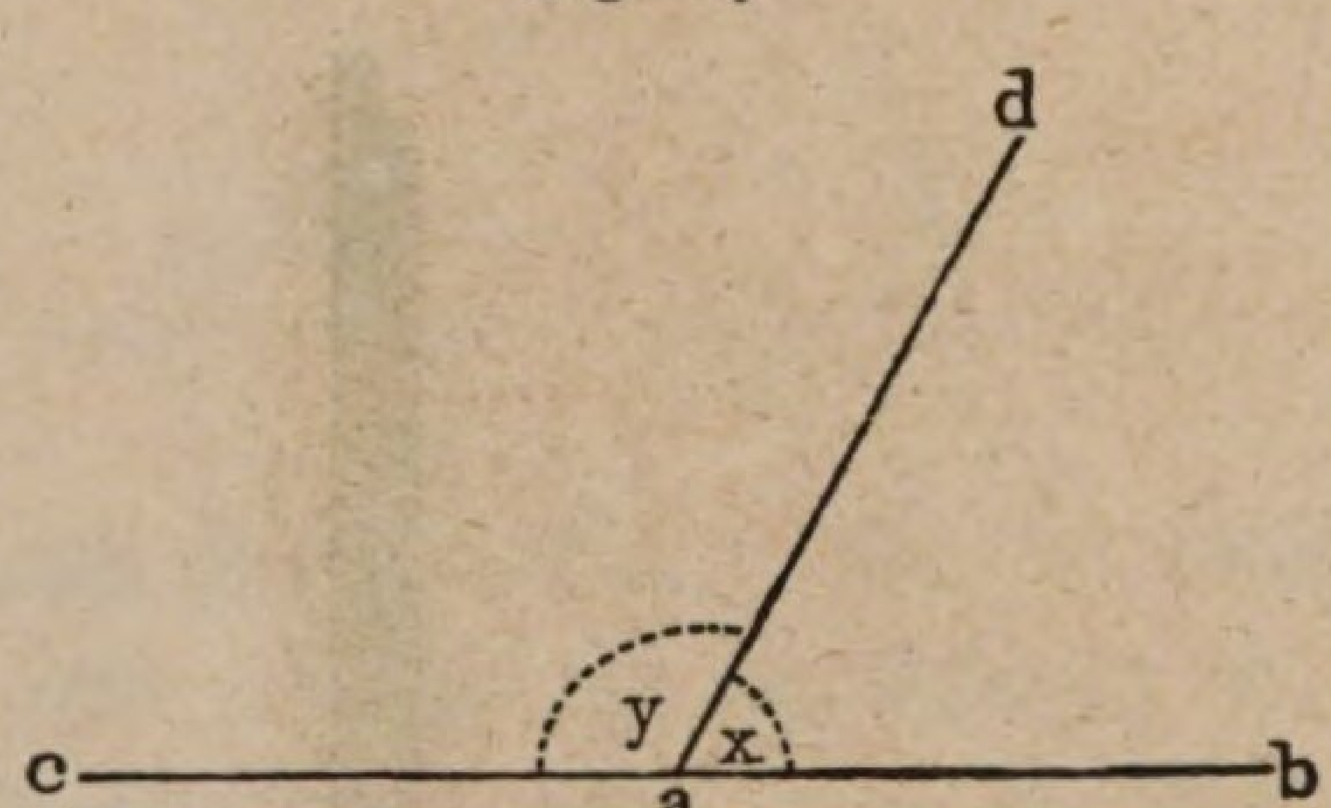
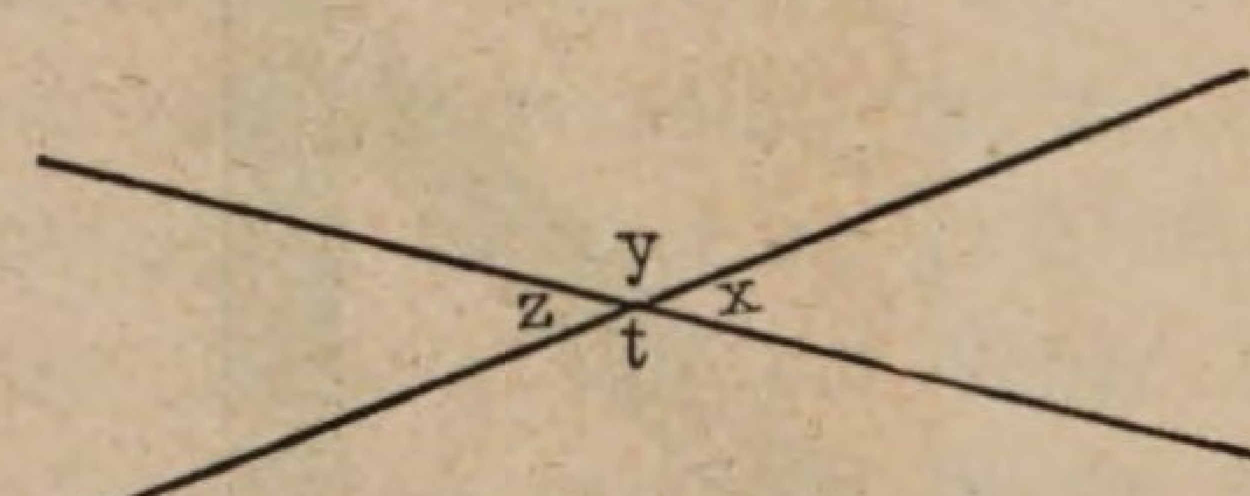


Fig. 8.



Verlängert man die beiden Schenkel eines Winkels x (Fig. 8) über den Scheitel hinaus, so entstehen noch drei Winkel y, z und t; alle vier Winkel, welche um den Durchschnittspunkt der beiden Geraden herumliegen, betragen zusammengenommen vier Rechte. Je zwei dieser Winkel, welche nur den Scheitel gemeinschaftlich haben, wie z und x, y und t, heißen Scheitelwinkel. Scheitelwinkel sind einander gleich, denn

$$y + x = 2 \text{ R.},$$
$$y + z = 2 \text{ R.},$$

also auch

$$y + x = y + z,$$

woraus folgt, daß

$$x = z.$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß $y = t$ ist.

Winkelmessung. Einen Winkel messen, heißt ihn mit einem 6
Winkel von bekannter Größe vergleichen. Als unveränderliche Winkeleinheit kann man am zweckmäßigsten den rechten Winkel betrachten, den man zur leichteren Vergleichung in 90 gleiche Theile getheilt hat, welche den Namen Grade führen. Die Größe der Drehung, welche nöthig ist, um einen Winkel von einem Grad (1°) zu erzeugen, wird also 90mal wiederholt einen rechten Winkel bilden. Ein Grad ist $^1/_{90}$ der Viertelumdrehung, $^1/_{180}$ der halben Umdrehung und $^1/_{360}$ der ganzen Umdrehung. Jeder Grad ist in 60 Minuten ('), jede Minute in 60 Secunden (") getheilt.

Ein Instrument, welches dazu dient, Winkel, welche auf das Papier gezeichnet sind, zu messen, oder genannte Winkel auf das Papier aufzutragen, heißt Transporteur.

Der Transporteur ist gewöhnlich ein Halbkreis, dessen Umfang in 180 gleiche, den einzelnen Graden entsprechende Theile getheilt ist, wie

Fig. 9.

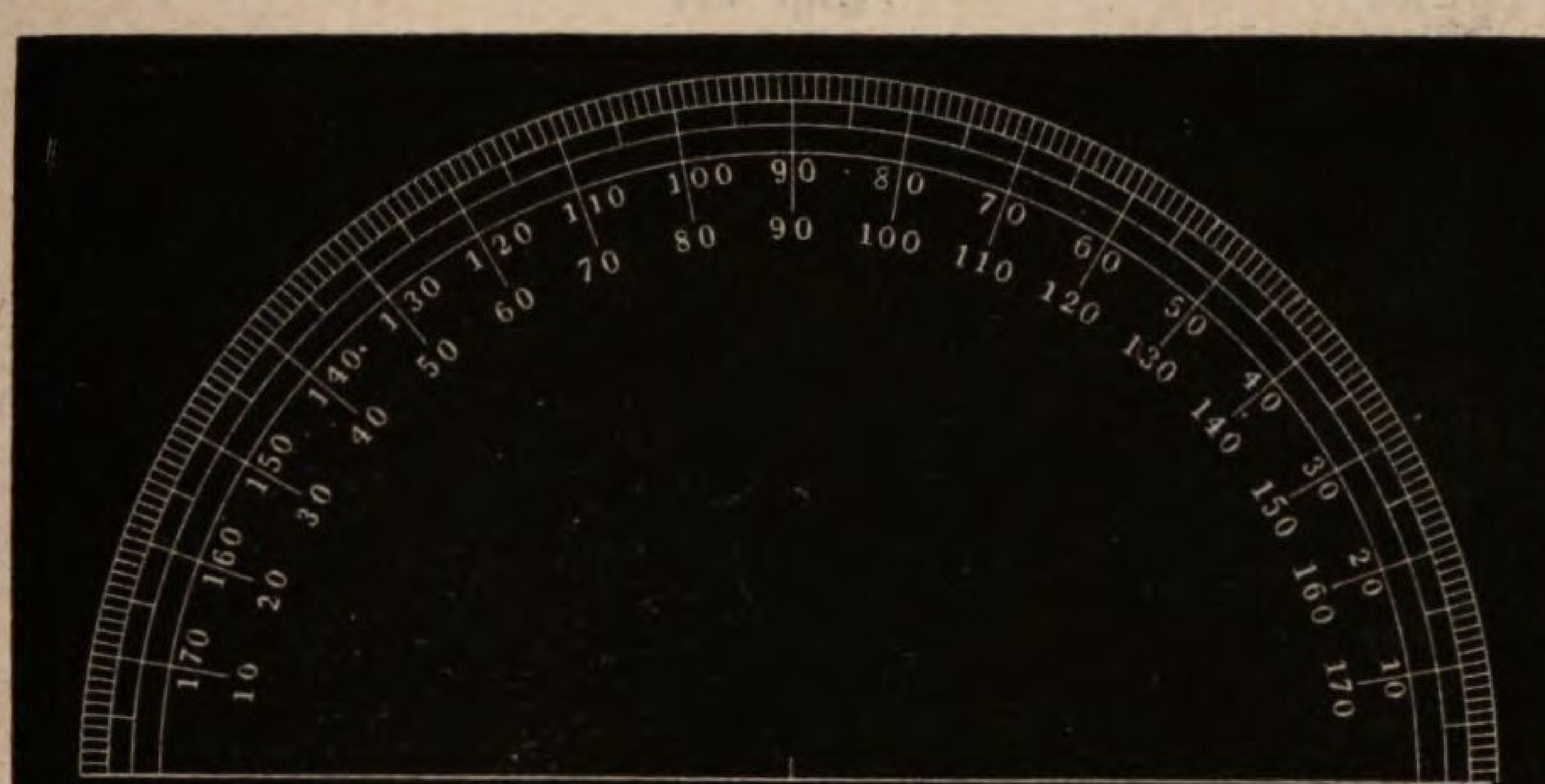


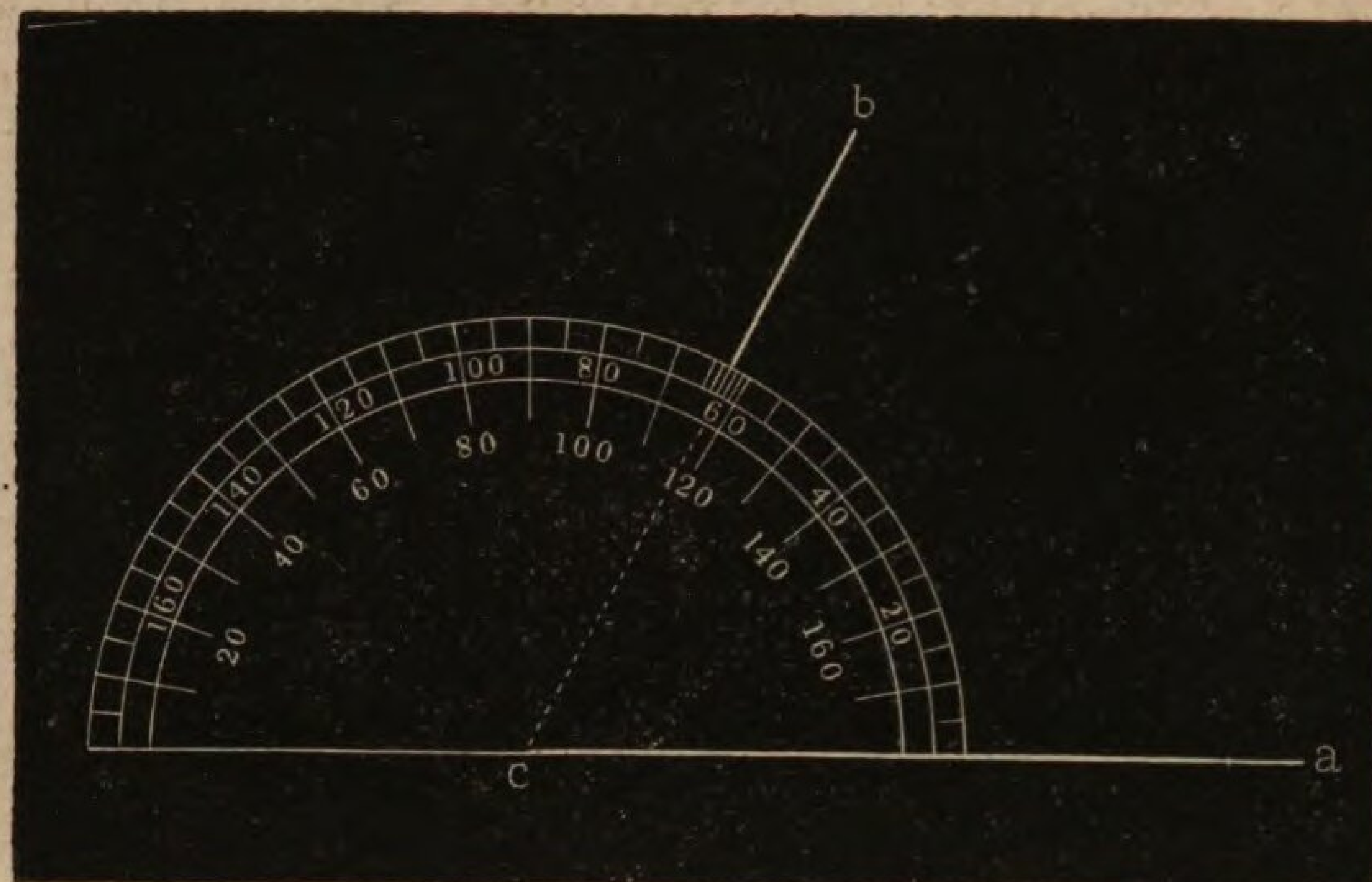
Fig. 9 zeigt. An dem Durchmesser, welcher den Halbkreis einerseits begränzt, ist der Mittelpunkt des Kreisbogens markirt.

Um einen Winkel zu messen, legt man den Durchmesser des Transporteur-Halbkreises so an den einen Schenkel des Winkels, daß der Mittelpunkt des Transporteurs auf den Scheitel des Winkels zu liegen kommt, wie Fig. 10 und Fig. 11 (a. f. S.) erläutern, und liest alsdann am getheilten Bogen des Transporteurs ab, wobei man aber von dem Schenkel an, an welchem der Durchmesser des Transporteurs angelegt ist, gegen den andern hin zählt; so mißt der Winkel *bca* (Fig. 10) 63°, der Winkel *dfg* (Fig. 11) mißt dagegen 117°.

Das Messen der Winkel ist gehörig einzuüben, ehe man weiter geht.

Ist einmal das Winkelmessen gehörig eingeübt, so bedarf das Auftragen von Winkeln keiner weiteren Erklärung.

Fig. 10.



Zur Uebung trage man Winkel von 23°, 57°, 73°, 87°, 112°, 163° u. s. w. auf.

Fig. 11.



Statt der gewöhnlich in Messing oder Horn ausgeführten Transporteure kann man auch einen auf Papier gedruckten anwenden, wenn derselbe längs der geradlinigen wie der halbkreisförmigen Gränze gehörig ausgeschnitten ist; es sind deshalb diesem Büchlein mehrere Abdrücke dieses Transporteurs auf stärkerem Papier beigegeben.

7 **Parallellinien.** Ist die Lage einer Linie *ab* (Fig. 12) gegeben, so wird die Richtung einer anderen Linie *cd* durch die vier Winkel *u*, *v*, *x* und *s* bestimmt, welche die Linie *cd* mit *ab* macht. Diese vier Winkel sind aber sämmtlich schon dadurch bestimmt, daß einer derselben gegeben ist. — Eine andere Linie *ef* bildet mit *ab* die vier Winkel *z*, *y*, *r* und *t*.

Der Winkel y entspricht seiner Lage nach dem Winkel x; ebenso sind z und u, t und s, r und v entsprechende Winkel. — Ist nun einer der vier Winkel z, y, r und t, z. B. der Winkel y, seinem entsprechenden Winkel x gleich, so sind auch die übrigen entsprechenden Winkel gleich, d. h. wenn $y = x$, so ist nothwendig auch $z = u$ (denn wenn die Winkel x und y gleich sind, so müssen es auch ihre Nebenwinkel sein), $r = v$ und $t = s$.

Wenn aber die Winkel, welche ef mit ab bildet, den durch die Linien ab und cd gebildeten entsprechenden Winkeln gleich sind, so ist die Richtung der Linien cd und ef auf gleiche Weise bestimmt, oder mit anderen Worten: die Linien cd und ef haben gleiche Richtung. Solche Linien aber, welche gleiche Richtung haben, heißen Parallellinien.

Fig. 12.

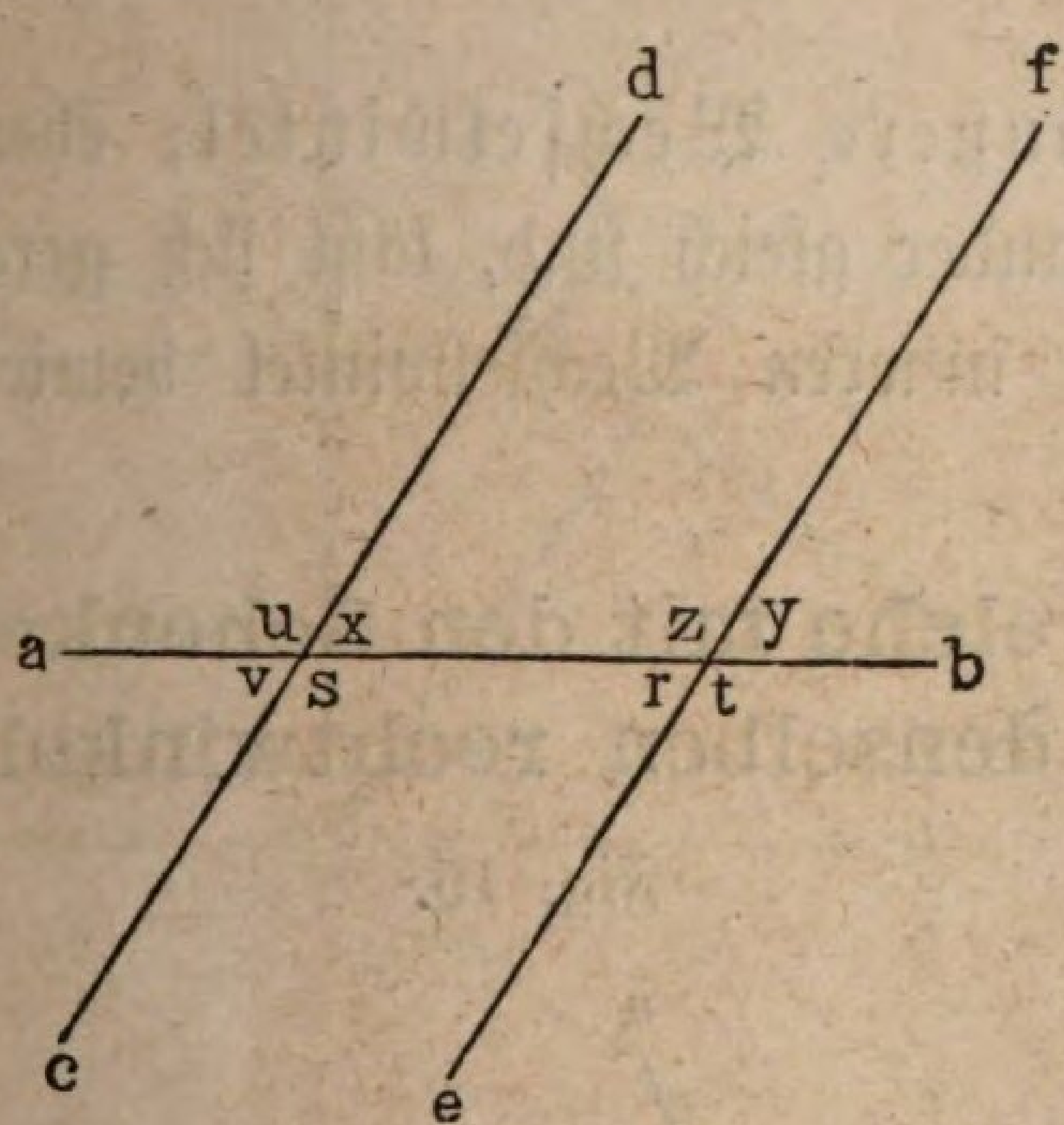
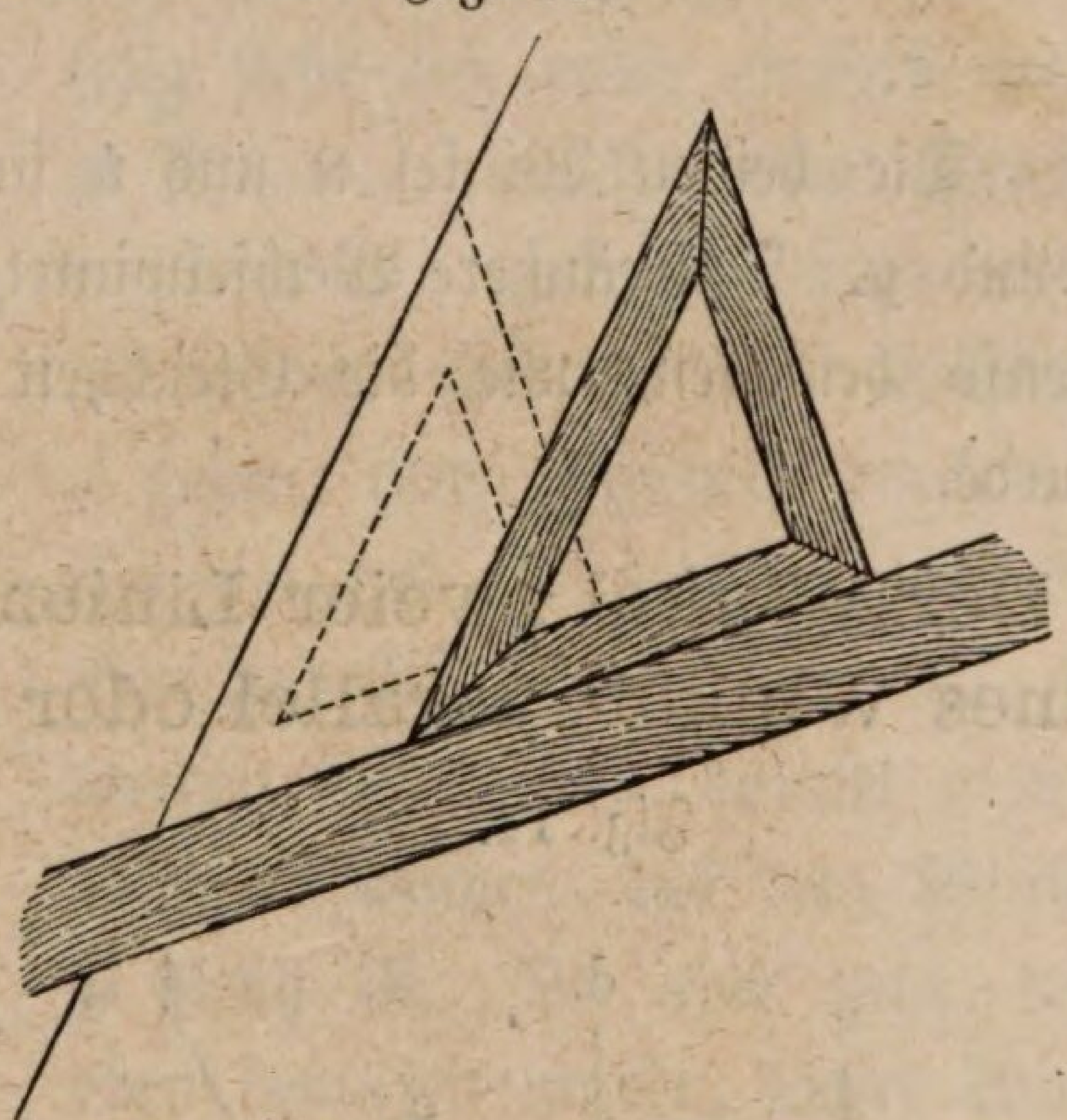


Fig. 13.



Es ist demnach leicht, Parallellinien mit Hülfe des Transporteurs zu ziehen; man hat nur Linien zu construiren, welche denselben Winkel mit einer gegebenen Linie machen, so werden sie sämmtlich unter einander parallel sein. Bequemer ist es, parallele Linien mit Hülfe eines rechten Winkels (d. h. eines rechtwinkeligen Dreiecks von Holz oder Metall) zu ziehen, denn wenn man ein solches (Fig. 13) an einem Lineale hin und her schiebt, so sind alle Lagen, welche eine und dieselbe Kante annehmen kann, unter einander parallel.

Da durch einen Punkt keine zwei Linien gehen können, welche gleiche Richtung haben (§. 4), so können Parallellinien keinen Punkt mit einander gemein haben, oder mit anderen Worten: parallele Linien können sich nie schneiden, man mag sie noch so sehr verlängern.

Aus der Gleichheit der entsprechenden Winkel, welche zwei parallele Linien mit einer dritten anders gerichteten bilden, ergeben sich folgende wichtige Beziehungen.

Die beiden Winkel x und z, Fig. 12, welche innerhalb der beiden Parallellinien auf derselben Seite der Linie ab liegen, heißen innere Gegenwinkel, und sind zusammengenommen gleich zwei Rechten, denn $z + y = 2$ R. (§. 5), also auch $z + x = 2$ R., da ja $x = y$. Die Winkel s und r sind ebenfalls innere Gegenwinkel und sind also ebenfalls zusammengenommen gleich zwei Rechten.

Die beiden Winkel x und r, welche innerhalb der beiden parallelen Linien und auf verschiedenen Seiten von ab liegen, heißen innere Wechselwinkel. Ebenso ist s ein innerer Wechselwinkel von z. Innere Wechselwinkel sind einander gleich, denn da $x = y$ und auch $r = y$ (§. 5), so muß auch $x = r$ sein. Ebenso läßt sich zeigen, daß $s = z$.

Die beiden Winkel u und t sind äußere Wechselwinkel; ebenso v und y. Daß äußere Wechselwinkel einander gleich sind, läßt sich gerade ebenso beweisen, wie die Gleichheit der inneren Wechselwinkel bewiesen wurde.

8 **Der Winkel zweier Linien, welche mit den Schenkeln eines Winkels parallel oder zu denselben rechtwinkelig**

Fig. 14.

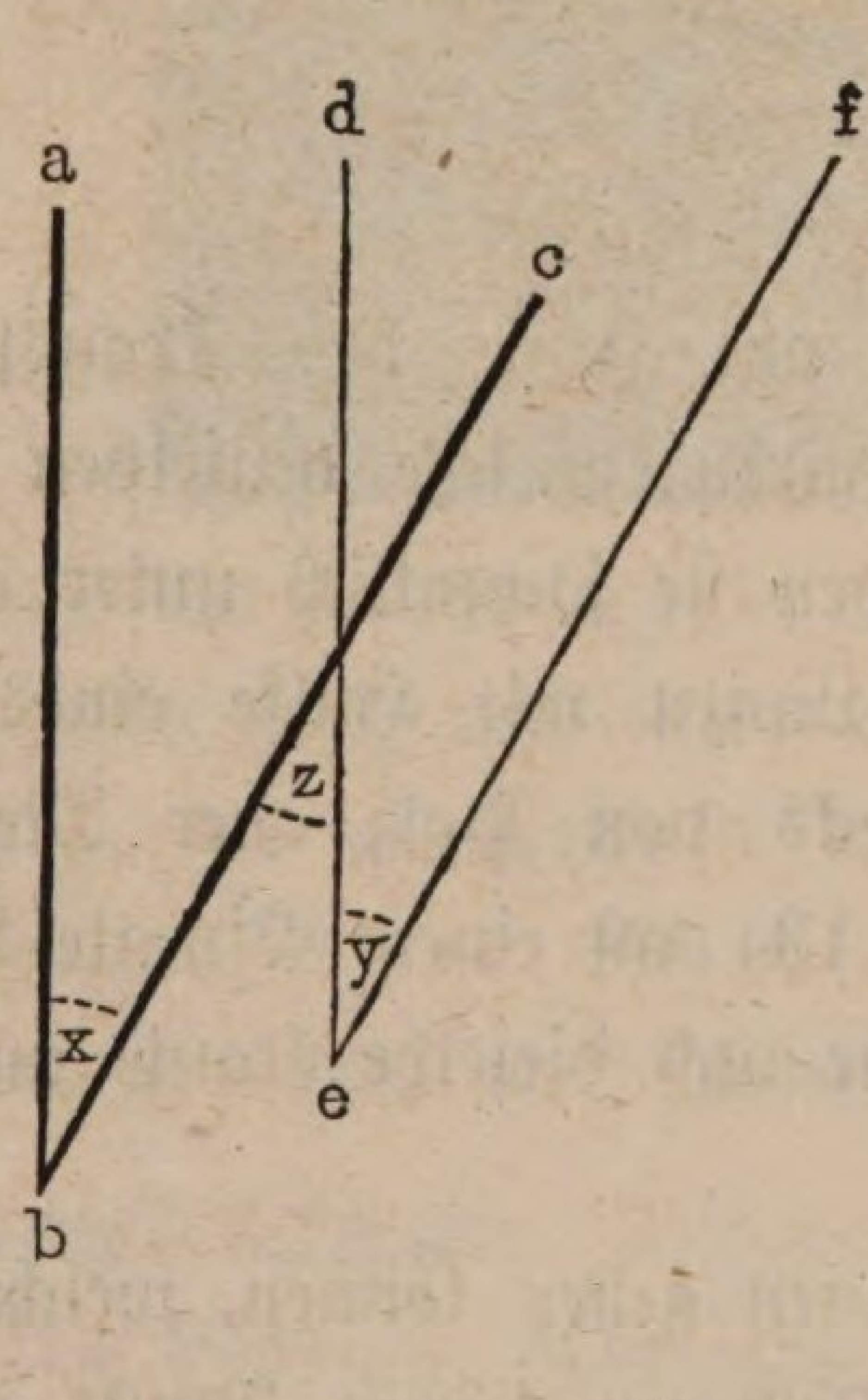
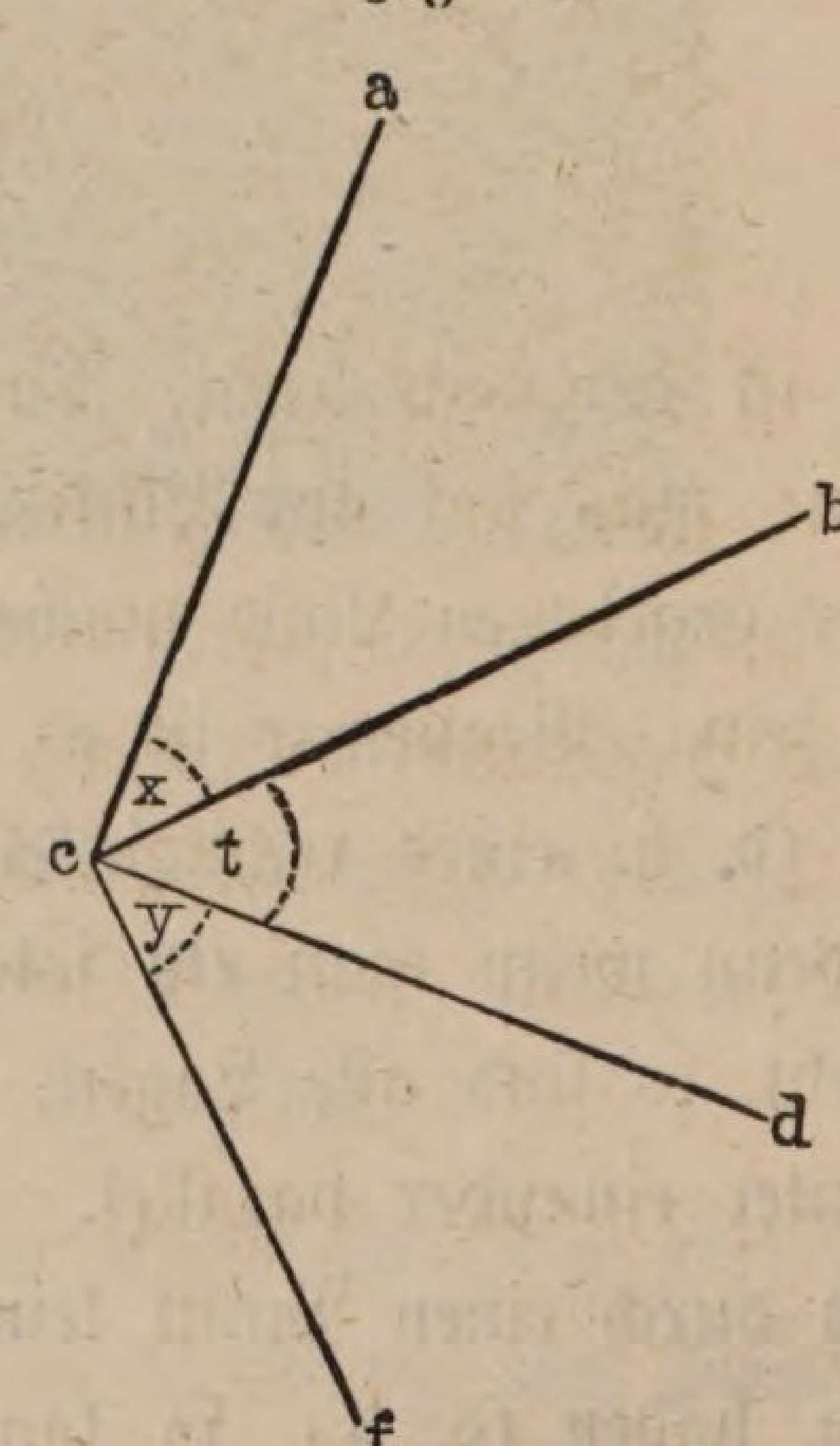


Fig. 15.



gezogen sind. Eine Folge aus §. 7 ist auch, daß der Winkel y (Fig. 14) dem Winkel x gleich sein muß, wenn jeder Schenkel des Win=

kels y einem Schenkel des Winkels x parallel ist. Den Beweis mag der Schüler selbst auffinden.

Errichtet man im Scheitel des Winkels x (Fig. 15) auf jedem Schenkel dieses Winkels ein Perpendikel, so ist der Winkel y, welchen die beiden Perpendikel mit einander machen, gleich dem Winkel x.

Beweis:

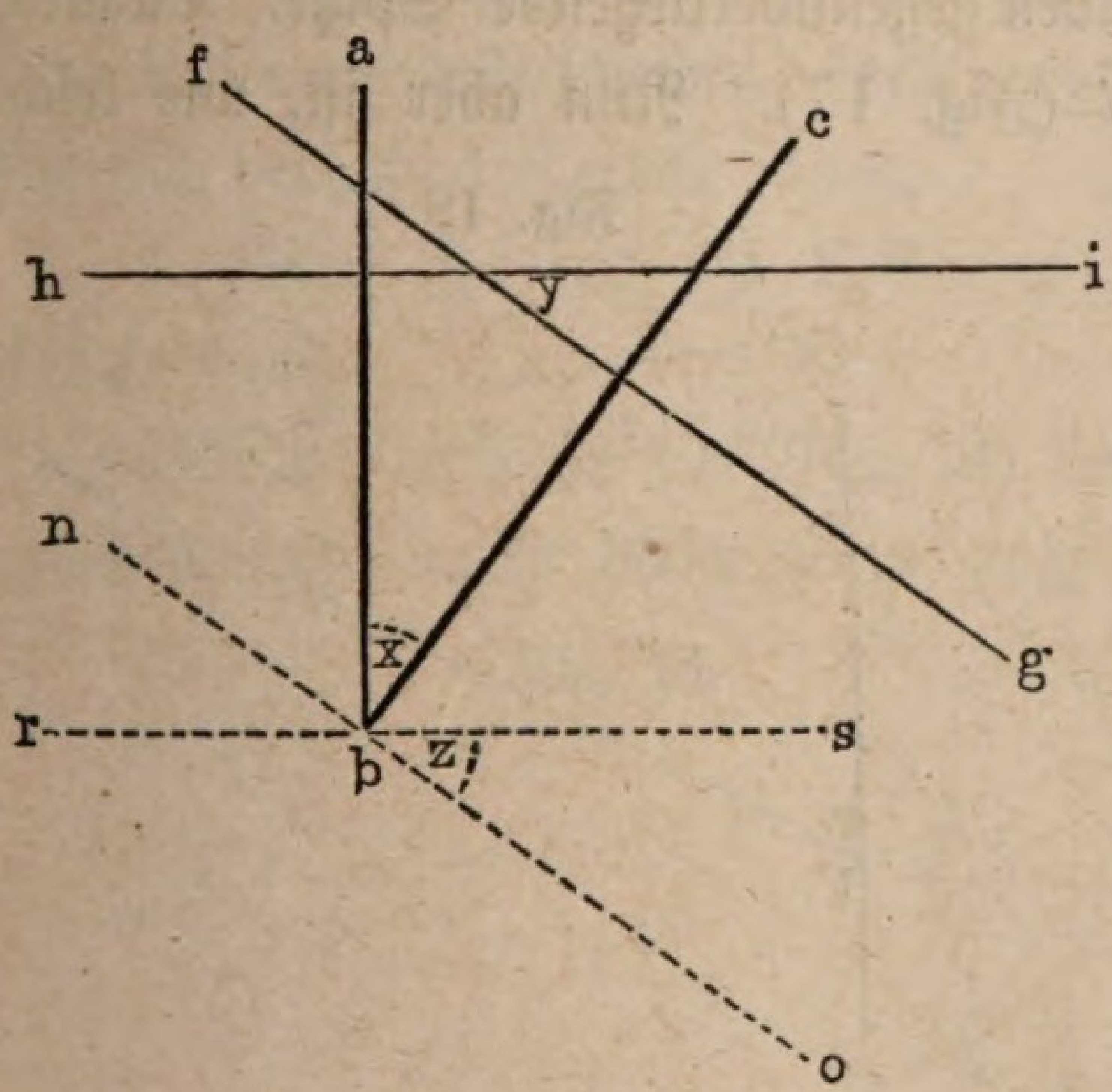
$$x + t = 1 \text{ R}.$$
$$y + t = 1 \text{ R}.$$

also $$x = y.$$

(Wie muß der Beweis geführt werden, wenn der gegebene Winkel x ein stumpfer ist?)

Daraus folgt nun allgemein, daß zwei Linien fg und hi (Fig. 16), von denen jede auf dem einen Schenkel des Winkels x rechtwinkelig steht, sich unter einem Winkel y schneiden, welcher dem Winkel x gleich ist, wenn sie auch nicht durch den Scheitel des Winkels x gehen; denn zieht man durch den Scheitel des Winkels x zwei Linien parallel mit fg und hi, so werden diese einen Winkel z mit einander machen, der dem Winkel y gleich ist. Da aber nun, wie eben bewiesen wurde, dieser Winkel $z = \angle x$ ist, so ist auch $\angle y = \angle x$.

Fig. 16.



Zweites Kapitel.

Vom Dreieck.

9 **Die Winkel des Dreiecks.** Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien begränzte ebene Figur.

Ein Dreieck hat drei Eckpunkte und drei Winkel.

Die drei Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich zwei Rechten.

Beweis. Man ziehe eine Linie parallel mit irgend einer der drei Seiten des Dreiecks durch die derselben gegenüberliegende Spitze. Dadurch entstehen zwei neue Winkel s und t (Fig. 17). Nun aber ist, wie leicht

Fig. 17.

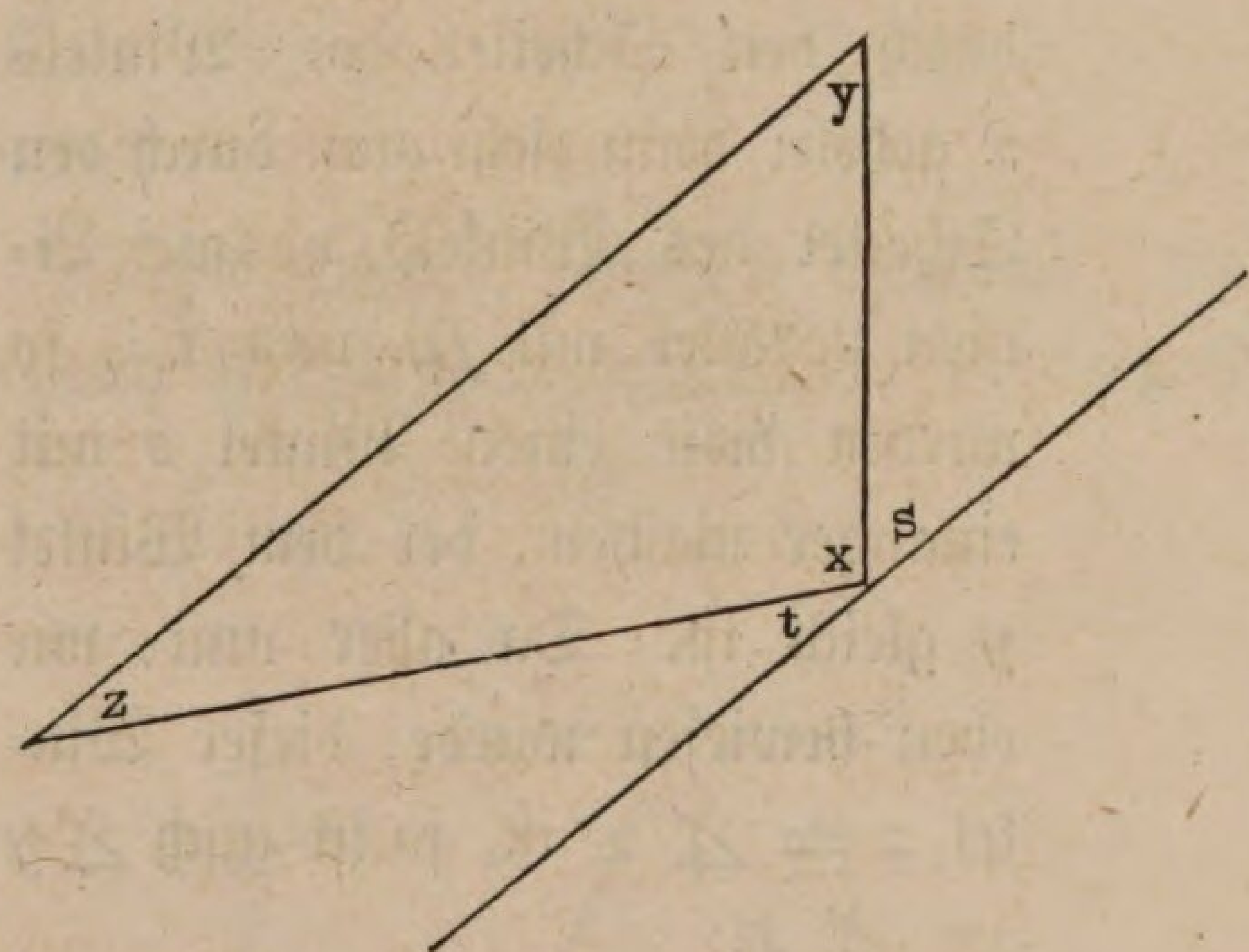
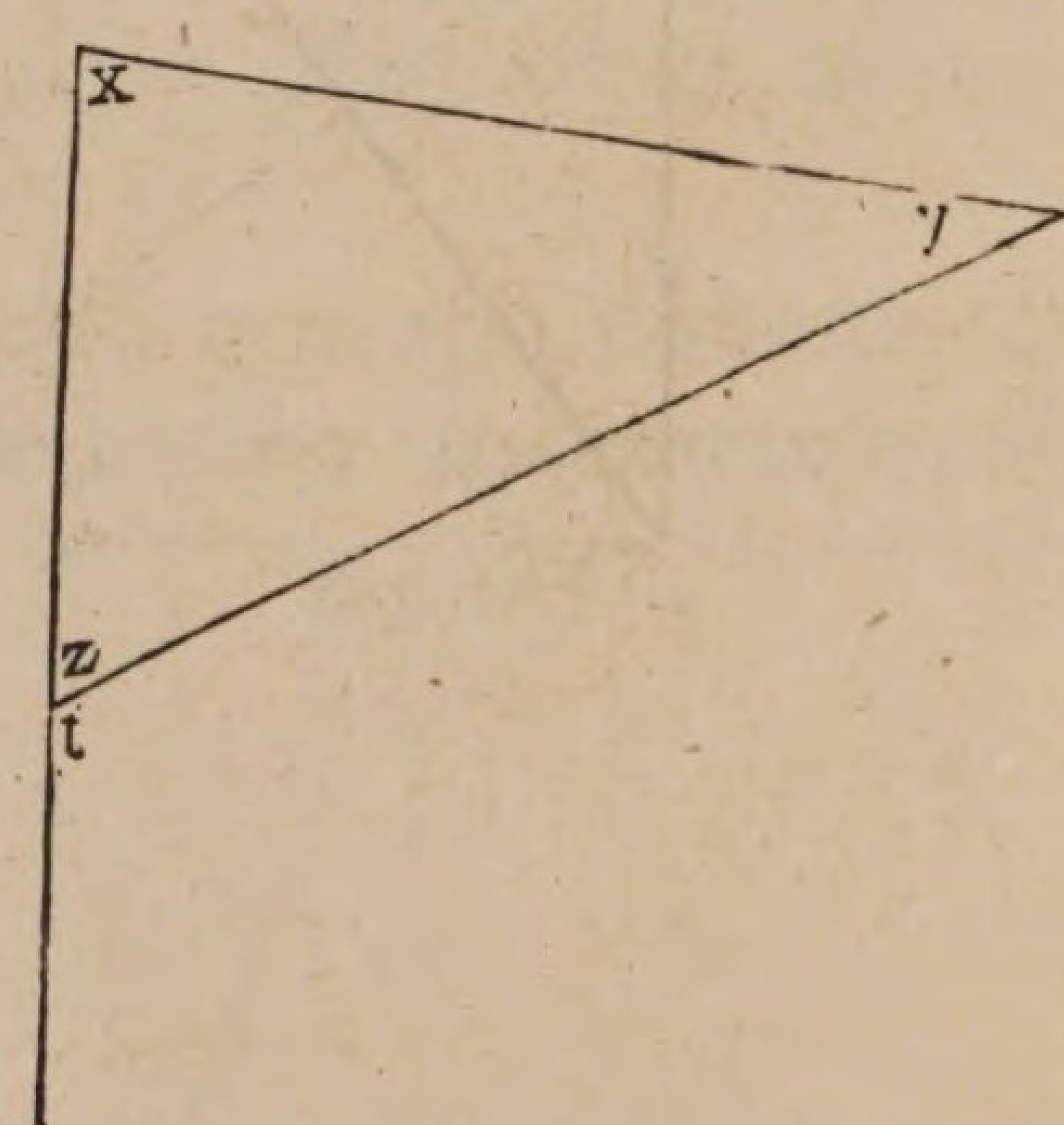


Fig. 18.



bewiesen werden kann, $s + x + t = 2$ R., folglich muß auch $y + x + z = 2$ R. sein, weil $y = s$ und $z = t$ (als Wechselwinkel).

Sind demnach in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt, so findet man den dritten, wenn man ihre Summe von 2 Rechten, also von 180^0 abzieht.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt auch, daß wenn sich in einem Dreieck ein rechter oder ein stumpfer Winkel befindet, die beiden anderen nothwendig spitze sein müssen.

Man nennt ein Dreieck spitzwinkelig, wenn alle drei Winkel spitze sind, rechtwinkelig, wenn es einen rechten, und stumpfwinkelig, wenn es einen stumpfen Winkel hat.

Verlängert man irgend eine Seite eines Dreiecks, so entsteht ein Außenwinkel t (Fig. 18), welcher so groß ist, wie die beiden inneren ihm gegenüberstehenden Winkel x und y zusammengenommen.

Beweis:

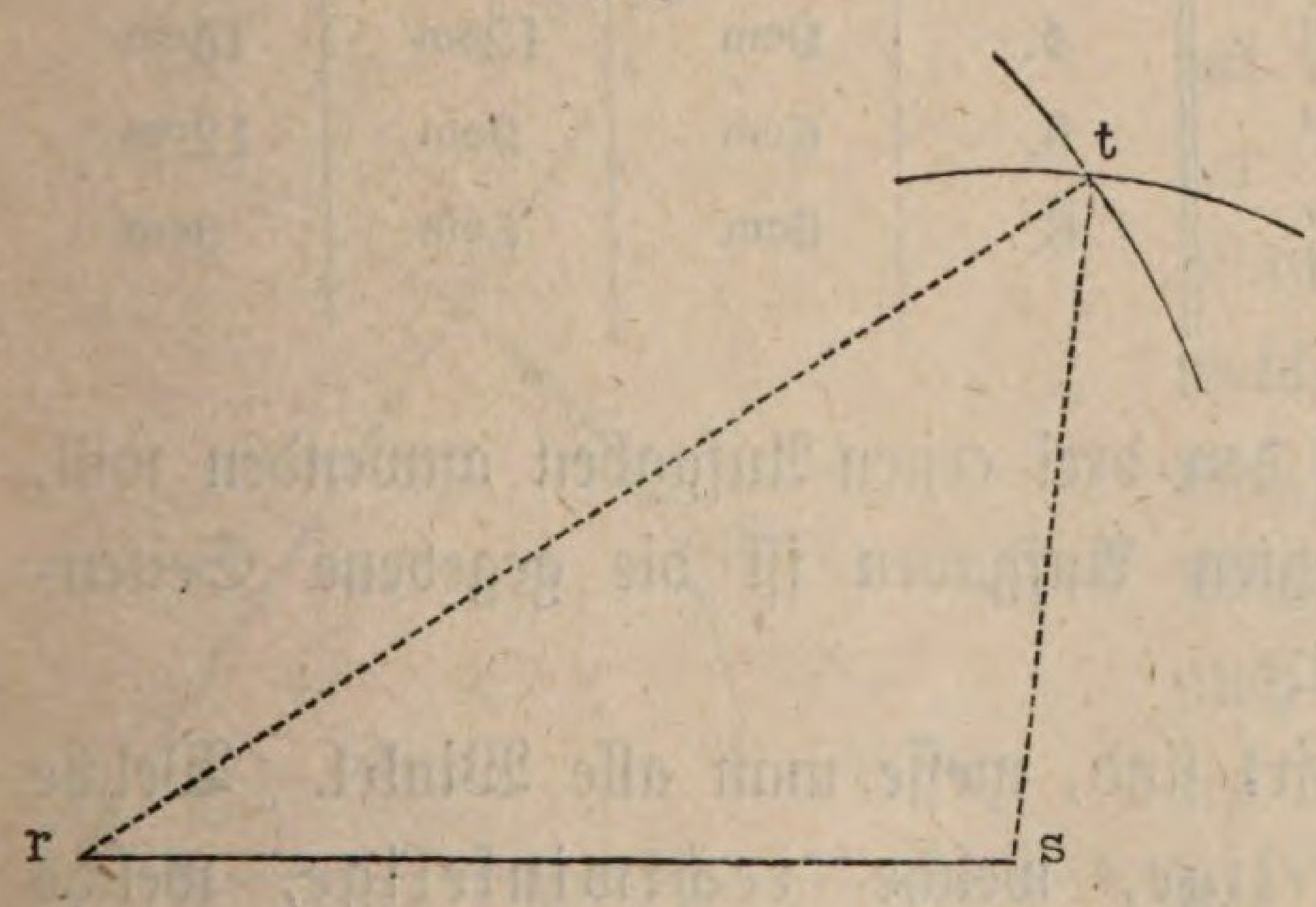
$$x + y + z = 2\,\mathrm{R}.$$
$$t + z = 2\,\mathrm{R}.,$$
also $$x + y + z = t + z,$$
woraus folgt, daß $$x + y = t.$$

Construction des Dreiecks nach drei gegebenen Bestimmungsstücken. 10
Ein Dreieck ist bestimmt, sobald die Lage der drei Eckpunkte bestimmt ist. Ist die Lage der Eckpunkte nicht unmittelbar gegeben, so kann sie mittelbar durch die einzelnen Bestimmungsstücke des Dreiecks, d. h. durch seine Seiten und Winkel gegeben sein. Es sind hier fünf Fälle zu unterscheiden, welche ihrer großen Wichtigkeit wegen ausführlich betrachtet werden sollen.

I. Ein Dreieck ist bestimmt, wenn seine drei Seiten gegeben sind.

Durch eine Seite rs (Fig. 19) sind schon zwei Eckpunkte des Dreiecks gegeben. Ist außer dieser Seite auch noch die Länge der Seite gegeben,

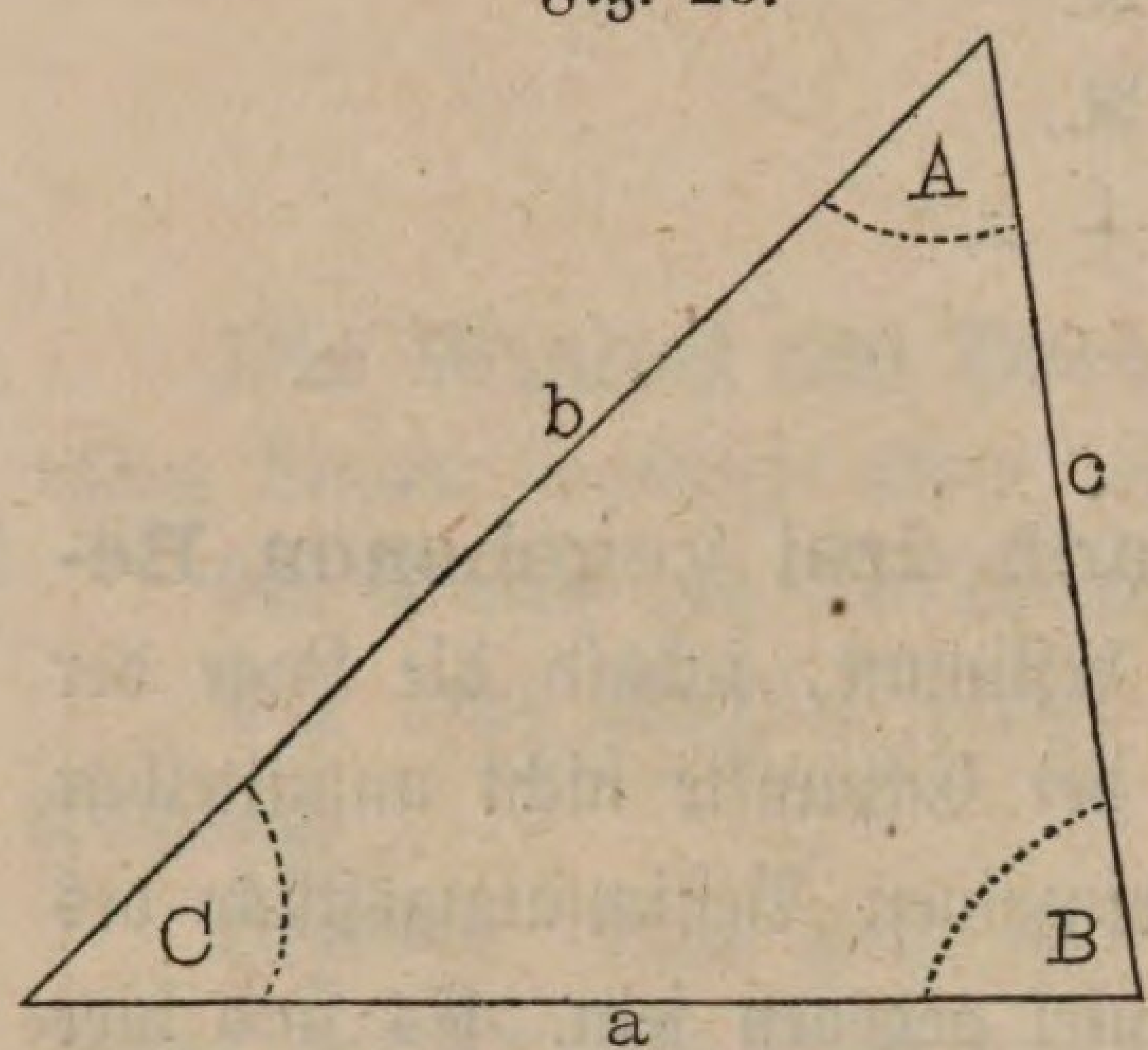
Fig. 19.



welche in r mit rs zusammentrifft, so ist dadurch die Bedingung ausgesprochen, daß der dritte Eckpunkt t um die Länge dieser zweiten gegebenen Linie von dem Punkte r entfernt sein muß, daß er also auf einem Kreise liegen muß, dessen Mittelpunkt r, und dessen Radius gleich dieser zweiten gegebenen Linie ist. Durch diese beiden Seiten ist aber offenbar das Dreieck noch nicht bestimmt, weil man ja den dritten Eckpunkt noch willkürlich auf dem um r gezogenen Kreise wählen kann. Ist aber noch die Länge der dritten Seite gegeben, so ist dadurch noch die Bedingung ausgesprochen, daß der Punkt t auch auf einem Kreise liegen soll, dessen Mittelpunkt s, und dessen Radius gleich dieser dritten Seite ist. Der gesuchte dritte Punkt muß also auf dem Durchschnittspunkte t der beiden Kreise liegen.

Da sich die Kreise sowohl über als unter *rs* schneiden, so läßt sich das verlangte Dreieck sowohl über als unter *rs* construiren. Zur leichtern Orientirung wollen wir annehmen, daß bei den folgenden Aufgaben stets eine Seite, die wir *a* nennen wollen, wagerecht liege. Die Seite links soll dann stets *b*, die rechts stets *c* genannt werden, wie man Fig. 20 sieht. Die drei Winkel der Dreiecke sollen im Folgenden stets mit denjenigen großen Buchstaben bezeichnet werden, welche mit den kleinen Buchstaben der gegenüberliegenden Seite gleichnamig sind; der obere Winkel soll also mit *A*, der Winkel links mit *C*, der Winkel rechts mit *B* bezeichnet werden.

Fig. 20.



Nach diesen Erläuterungen werden die folgenden Aufgaben verständlich sein.

Sechs Dreiecke zu construiren, für welche

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1.	2″	2″	2″	4.	9cm	12cm	15cm
2.	2″	3″	3″	5.	6cm	9cm	12cm
3.	3″	2″	2″	6.	6cm	5cm	9cm

Welches Zollmaaß man bei den drei ersten Aufgaben anwenden will, ist gleichgültig. Bei den drei letzten Aufgaben ist die gegebene Seitenlänge in Centimetern ausgedrückt.

Wenn diese Dreiecke construirt sind, messe man alle Winkel. Welche dieser Dreiecke sind spitzwinkelige, welche rechtwinkelige, welche stumpfwinkelige?

Wenn alle drei Seiten eines Dreiecks einander gleich sind, so heißt es gleichseitig, sind nur zwei Seiten einander gleich, gleichschenkelig, ist keine Seite der andern gleich, ungleichseitig. Welche der construirten sechs Dreiecke sind gleichseitig, welche gleichschenkelig?

(Nach dem Muster dieser können noch mehr Beispiele hinzugefügt werden.)

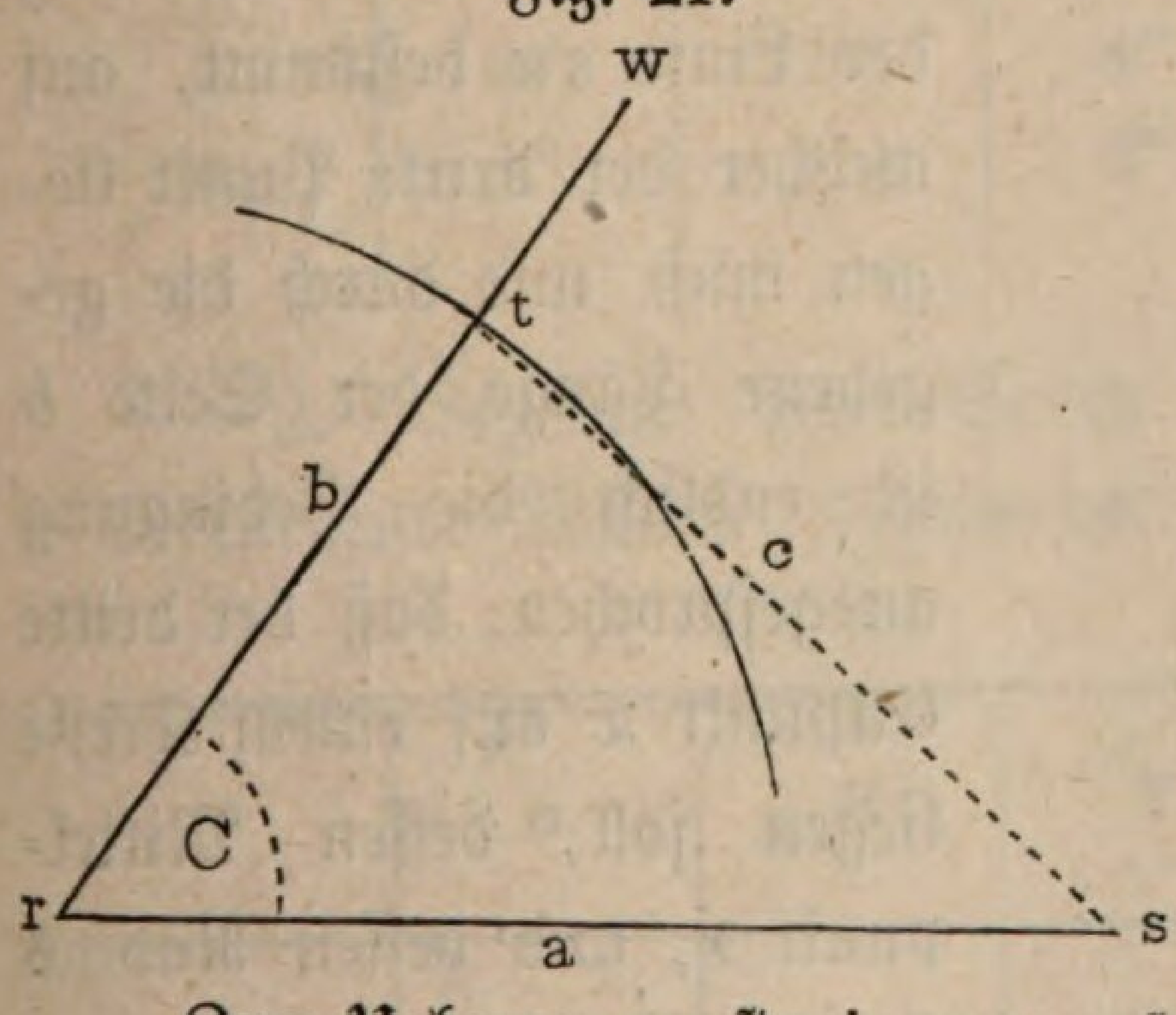
Da durch die drei in gleicher Ordnung auf einander folgenden Seiten ein Dreieck vollständig bestimmt ist, so kann man aus drei gegebenen Seiten auch nicht zwei verschiedene Dreiecke construiren. Construirt man mit denselben drei Seiten zwei Dreiecke, so müssen beide einander gleich sein. Kann man nachweisen, daß jede Seite eines Dreiecks gleich ist der entsprechenden Seite eines andern, so kann man demnach daraus schließen, daß die ganzen Dreiecke, mithin auch die entsprechenden Winkel gleich sein müssen.

Sind zwei der zur Construction eines Dreiecks gegebenen Seiten zusammengenommen kleiner als die dritte, so ist die Auflösung unmöglich. Es sei z. B. $a = 3''$, $b = 1''$, $c = 1''\ 5'''$; $a = 3^{cm}$, $b = 6^{cm}$, $c = 9^{cm}$. In einem Dreieck sind also zwei Seiten zusammengenommen stets größer als die dritte.

II. Ein Dreieck ist bestimmt, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Wäre z. B. wieder nur die Seite a (Fig. 21), gegeben, so wären dadurch nur zwei Eckpunkte r und s des Dreiecks bestimmt, und der dritte noch vollkommen willkürlich. Diese Willkür wird schon dadurch beschränkt, daß man den Winkel C bestimmt, den die Seite b mit der Seite a machen soll. (Dieser Winkel ist C genannt, weil er der Seite c gegenüberliegt. Ebenso sollen auch mit A und B die den Seiten a und b gegenüberliegenden Winkel bezeichnet werden.) Dadurch nämlich, daß der Winkel C gegeben ist, ist die Richtung der Linie rw gegeben, auf welcher der dritte Eckpunkt t liegen muß; durch die Bestimmung der Länge der Seite b wird nun endlich auch noch der Ort des dritten Punktes t auf der Linie rw und somit das ganze Dreieck bestimmt.

Fig. 21.



Zur Uebung construire man folgende sechs Dreiecke:

	a	C	b		a	B	c
1.	2″	80°	3″	4.	100mm	75°	95mm
2.	3″	112°	2″	5.	84mm	36°	115mm
3.	4″	60°	2″	6.	112mm	120°	92mm

Bei den drei letzten Aufgaben sind die Längen in Millimetern ausgedrückt.

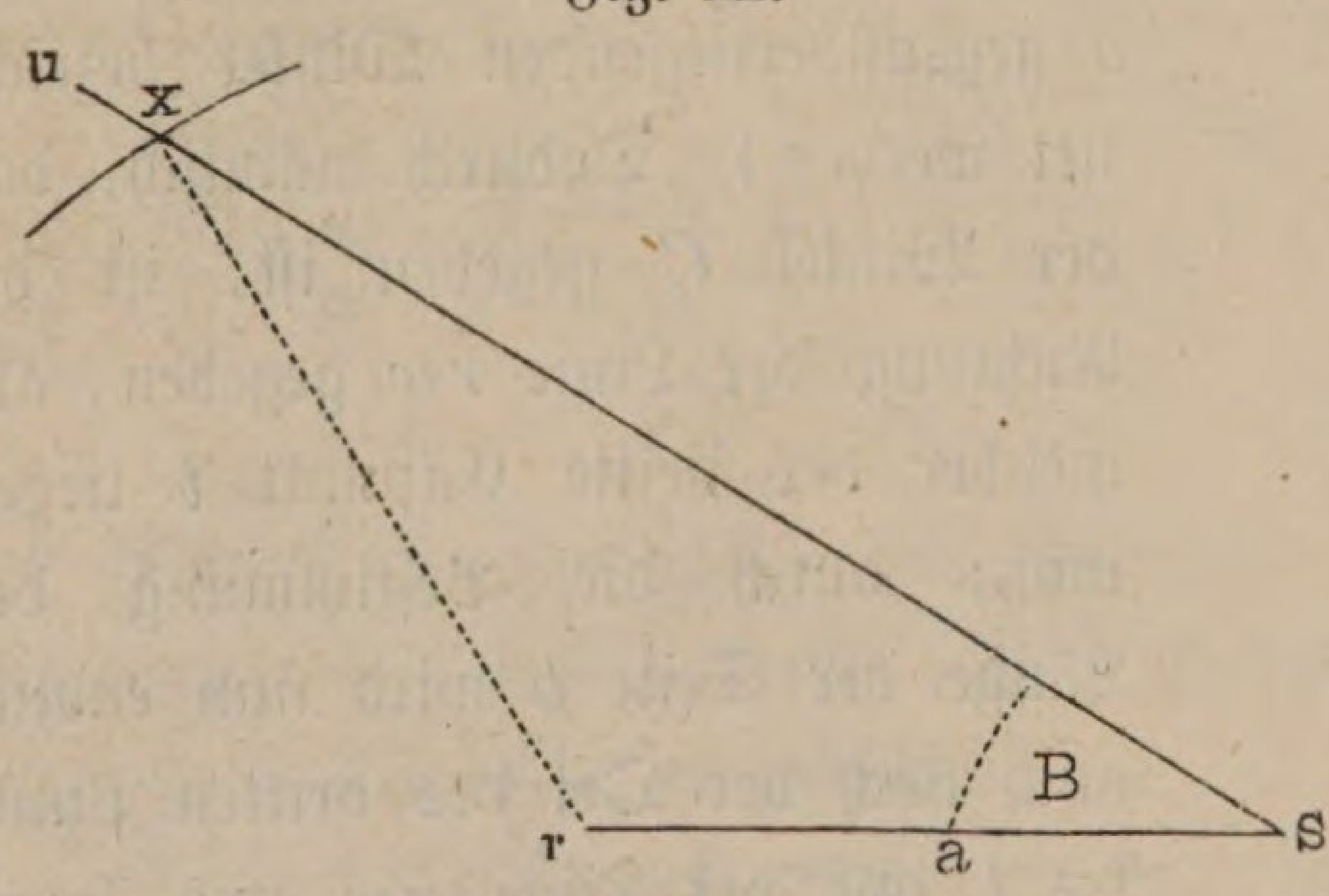
Wie groß sind in jedem dieser Dreiecke die nicht gegebenen Winkel, und die nicht gegebene Seite?

Wenn man aus denselben zwei Seiten, welche denselben Winkel einschließen, zwei Dreiecke construirt, so müssen dieselben nothwendig vollständig einander gleich sein, weil ja zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel ein Dreieck vollkommen bestimmen, und die beiden Dreiecke also auf gleiche Weise bestimmt sind. Man kann demnach auch behaupten, daß zwei Dreiecke gleich sein müssen, wenn man nachweisen kann, daß zwei Seiten des einen gleich sind den entsprechenden Seiten des andern, und daß der von beiden Linien eingeschlossene Winkel im einen Dreieck so groß ist wie im andern.

III. Wenn zur Construction eines Dreiecks zwei Seiten und ein Winkel gegeben ist, welcher der einen von beiden Seiten gegenüber liegt, so ist das Dreieck nur in einem Falle vollkommen bestimmt, wie dies aus der folgenden Betrachtung klar werden wird.

Es sei zur Construction eines Dreiecks gegeben a, b und B, aber $b > a$. Durch die Seite a (Fig. 22) sind zwei Eckpunkte r und s des Dreiecks gegeben. Durch den Winkel B ist die Richtung der Linie su bestimmt, auf welcher der dritte Punkt liegen muß, und durch die gegebene Länge der Seite b ist endlich die Bedingung ausgesprochen, daß der dritte Eckpunkt x auf einem Kreise liegen soll, dessen Mittelpunkt r, und dessen Radius der gegebenen Länge b gleich ist.

Fig. 22.

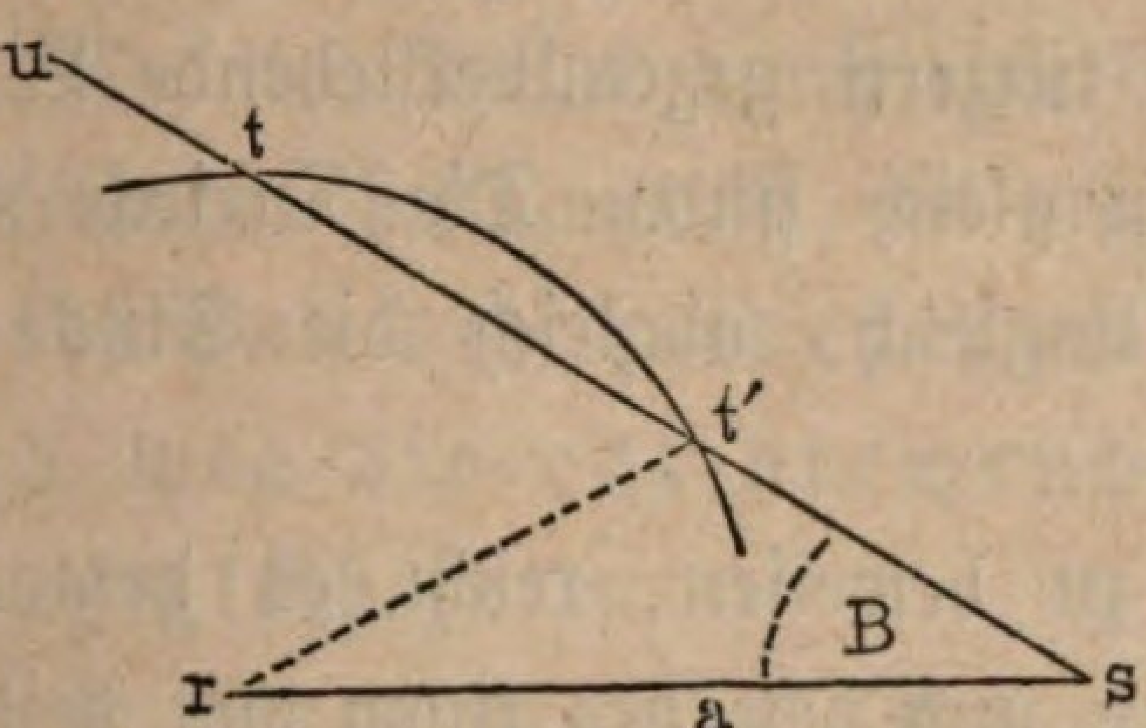


Der gesuchte Punkt x muß also der Durchschnittspunkt der geraden Linie su und des um r beschriebenen Kreises sein. In unserm Falle sind zwei Seiten und der Winkel gegeben, welcher der größern von beiden Seiten gegenüberliegt. In diesem Falle ist das Dreieck durch die gegebenen Stücke vollständig bestimmt. Ließe man bei unveränderter Größe von a und B die Seite b abnehmen, so würde der dritte Eckpunkt x näher zu s herunterrücken. Verkleinert man b

soweit, daß es gleich *a* wird, so wird das Dreieck ein gleichschenkeliges; der um *r* beschriebene Kreis geht alsdann auch durch den Punkt *s*. Wird aber *b* kleiner als *a*, so schneidet der um *r* beschriebene Kreis die Linie *su* in zwei Punkten *t* und *t′* (Fig. 23), von denen man jeden als dritten Punkt des Dreiecks wählen kann; man kann demnach aus denselben Stücken *a*, *B* und *b* zwei verschiedene Dreiecke *srt* und *srt′* construiren, wenn $b < a$.

Endlich kann man *b* noch so klein werden lassen, daß der um *r* beschriebene Kreis die Seite *su* gar nicht schneidet. In diesem Falle ist es gar nicht möglich, aus den gegebenen Stücken ein Dreieck zu construiren. Das Gesagte wird durch die Construction folgender Dreiecke klar werden.

Fig. 23.



1. Gegeben: zwei Seiten und der der längern von beiden gegenüberstehende Winkel. (Nur eine Auflösung möglich.)

	a	B	b		a	C	c
1.	2″	80°	3″	4.	6cm	110°	12cm
2.	3″	120°	4″	5.	9cm	64°	9cm
3.	1″	40°	2″	6.	6cm	72°	7,5cm

2. Gegeben: zwei Seiten und der der kürzern von beiden gegenüberstehende Winkel. (Entweder zwei oder keine Lösung möglich.)

	a	B	b		a	C	c
1.	4″	36°	2″	4.	12cm	110°	6cm
2.	5″	120°	3″	5.	12cm	48°	10,5cm
3.	3″	40°	2″5‴	6.	15cm	72°	12cm

Sind also zur Construction eines Dreiecks zwei Seiten und der der längern von beiden gegenüberstehende Winkel gegeben, so ist die Auf-

lösung jederzeit möglich und das Dreieck durch diese Stücke vollkommen bestimmt. Daraus folgt aber, daß zwei Dreiecke einander gleich sein müssen, wenn man nachweisen kann, daß zwei Seiten des einen und der Winkel, welcher der längern von beiden gegenübersteht, den entsprechenden Stücken des andern gleich sind.

Sind zur Construction eines Dreiecks zwei Seiten und der der kürzern von beiden gegenüberstehende Winkel gegeben, so ist entweder gar keine, oder es sind zwei Auflösungen möglich. Es folgt daraus, daß zwei Dreiecke verschieden sein können, wenn man auch nachweisen kann, daß zwei Seiten des einen, und der der kürzern gegenüberstehende Winkel den entsprechenden Stücken des andern gleich sind. Die Dreiecke *srt* und *srt'* (Fig. 24) z. B. sind offenbar ungleich, obgleich die Stücke *a*, *b* und *B* in beiden gleich sind.

Um die Gleichheit zweier Dreiecke zu beweisen, reicht es demnach nicht hin nachzuweisen, daß sie zwei Seiten und den der einen von beiden gegenüberliegenden Winkel gleich haben, wenn man nicht auch zeigen kann, daß dieser Winkel der größern Seite gegenüberliegt.

Fig. 24.

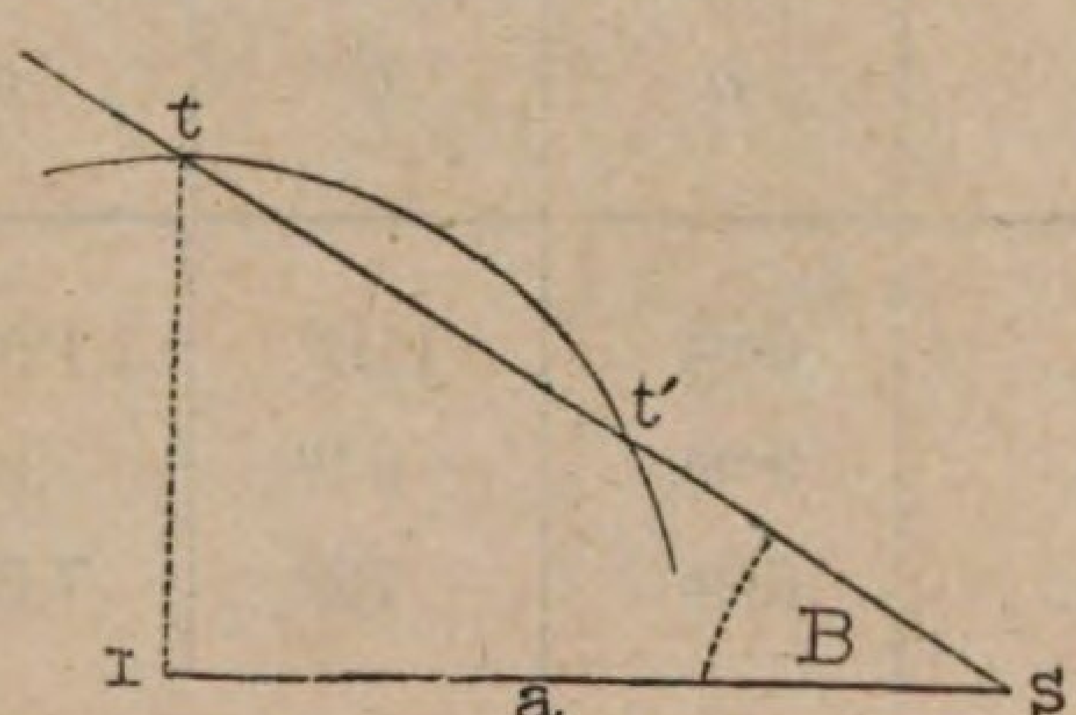
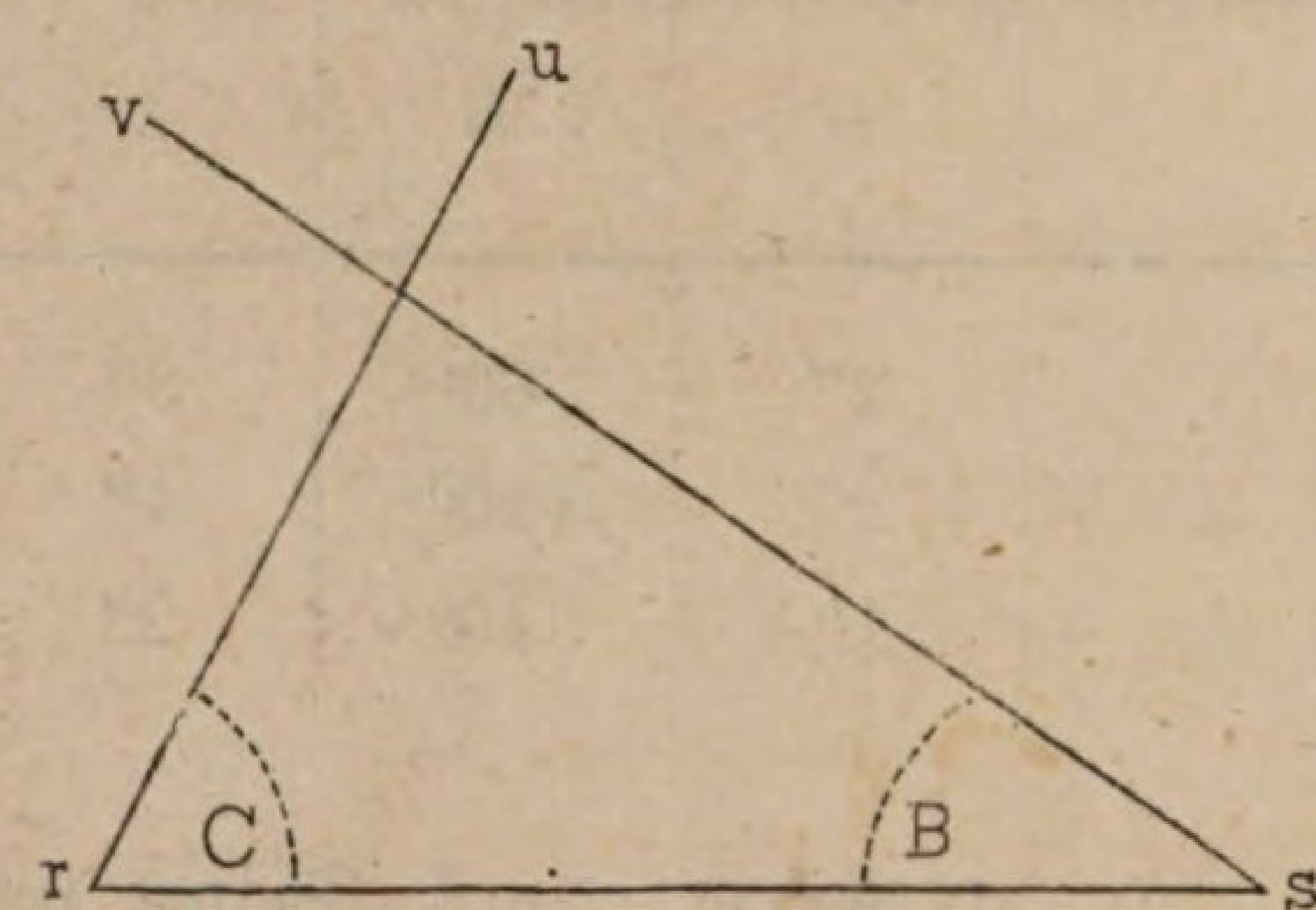


Fig. 25.



IV. Durch eine Seite und die beiden an dieser Seite anliegenden Winkel ist Ein Dreieck vollkommen bestimmt.

Durch eine Seite *a* sind zwei Eckpunkte *r* und *s* (Fig. 25) des Dreiecks, durch den Winkel *C* ist die Richtung der Linie *ru*, durch den Winkel *B* ist die Richtung der Linie *sv* bestimmt, auf denen der dritte Eckpunkt liegen muß; er kann also nur auf dem Durchschnitt der beiden Linien *sv* und *ru* liegen.

Beispiele.

	a	B	C		a	B	C
1.	97mm	60°	30°	4.	10cm	110°	30°
2.	122mm	80°	40°	5.	13cm	115°	40°
3.	70mm	73°	36°	6.	8cm	45°	120°

Da ein Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel vollkommen bestimmt ist, so muß auch ein Dreieck, in welchem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gerade so groß sind wie die entsprechenden Stücke eines andern, diesem ganz gleich sein.

V. Ein Dreieck ist durch eine Seite, einen anliegenden und einen ihr gegenüberliegenden Winkel völlig bestimmt; denn da zwei Winkel gegeben sind, so kann man den dritten berechnen, und dadurch läßt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen. Wenn man aus den gegebenen Winkeln, etwa A und C, den dritten B berechnet hat, so ist man in demselben Fall, als wäre gleich von Anfang die Seite a mit den beiden anliegenden Winkeln B und C gegeben gewesen.

Beispiele.

	a	B	A		a	B	A
1.	3″	40°	112°	4.	9cm	30°	40°
2.	4″	50°	85°	5.	12cm	20°	70°
3.	2″	60°	78°	6.	6cm	40°	120°

Aus dem Vorangegangenen folgt, daß zwei Dreiecke einander gleich sein müssen, wenn man nachweisen kann, daß sie eine Seite, einen ihr anliegenden und einen ihr gegenüberstehenden Winkel gleich haben.

Der Uebersicht wegen wollen wir die fünf in diesem Paragraphen

besprochenen Fälle, für welche die Gleichheit zweier Dreiecke behauptet werden kann, kurz zusammenstellen.

Zwei Dreiecke sind einander gleich:

1. Wenn jede der drei Seiten des einen gleich ist der entsprechenden Seite des andern.

2. Wenn sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben.

3. Wenn zwei Seiten und der der längern von beiden gegenüberstehende Winkel gleich sind den entsprechenden Stücken des andern Dreiecks.

4. Wenn die beiden Dreiecke eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gleich haben.

5. Wenn eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberstehender Winkel in beiden gleich sind.

In den folgenden Lehrsätzen gründet sich der Beweis für die Gleichheit zweier Dreiecke immer auf einen der oben aufgezählten Fälle.

11 **Lehrsatz.** In einem gleichschenkeligen Dreieck sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen, einander gleich, oder mit anderen Worten: die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sind einander gleich.

Beweis. Es sei rst (Fig. 26) ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem $rt = st$. Man denke sich nun die Grundlinie rs halbirt, und nach dem Halbirungspunkt d die Linie td gezogen, so entstehen zwei Dreiecke, welche einander gleich sind, denn

$$rt = st$$
$$rd = sd$$
$$td = td$$

also $\triangle\, rtd = \triangle\, std$ (1. Fall).

Sind aber die ganzen Dreiecke gleich, so müssen auch die entsprechenden Winkel gleich sein, folglich $\measuredangle\, x = \measuredangle\, g$. Aus der Gleichheit der beiden Dreiecke folgt auch $\measuredangle\, z = \measuredangle\, v$; die Linie, welche man von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie zieht, steht also rechtwinkelig auf derselben. In einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel einander gleich, und jeder beträgt $^2/_3$ R. oder 60^0.

Lehrsatz. Sind zwei Winkel in einem Dreieck einander gleich, so sind es auch die ihnen gegenüberstehenden Seiten, das Dreieck ist gleichschenkelig. 12

Fig. 26.

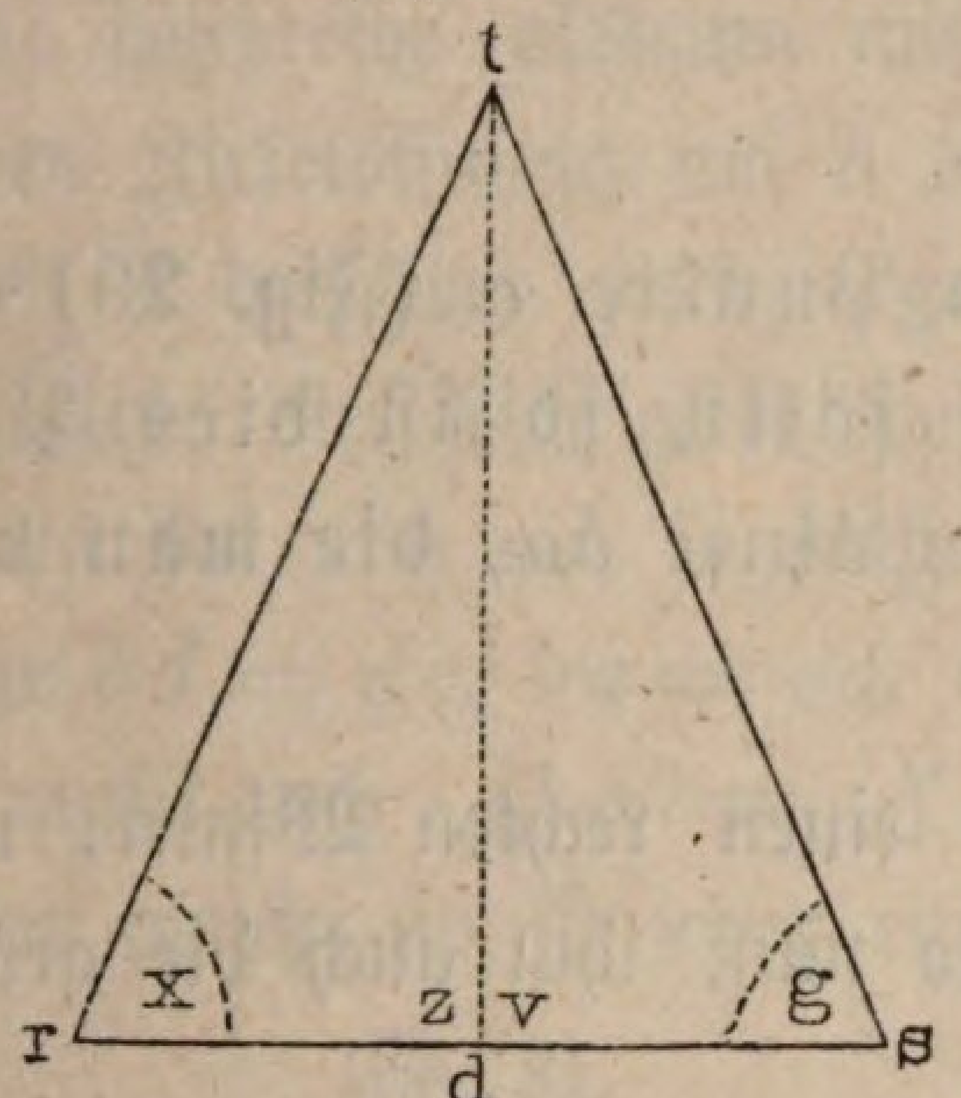
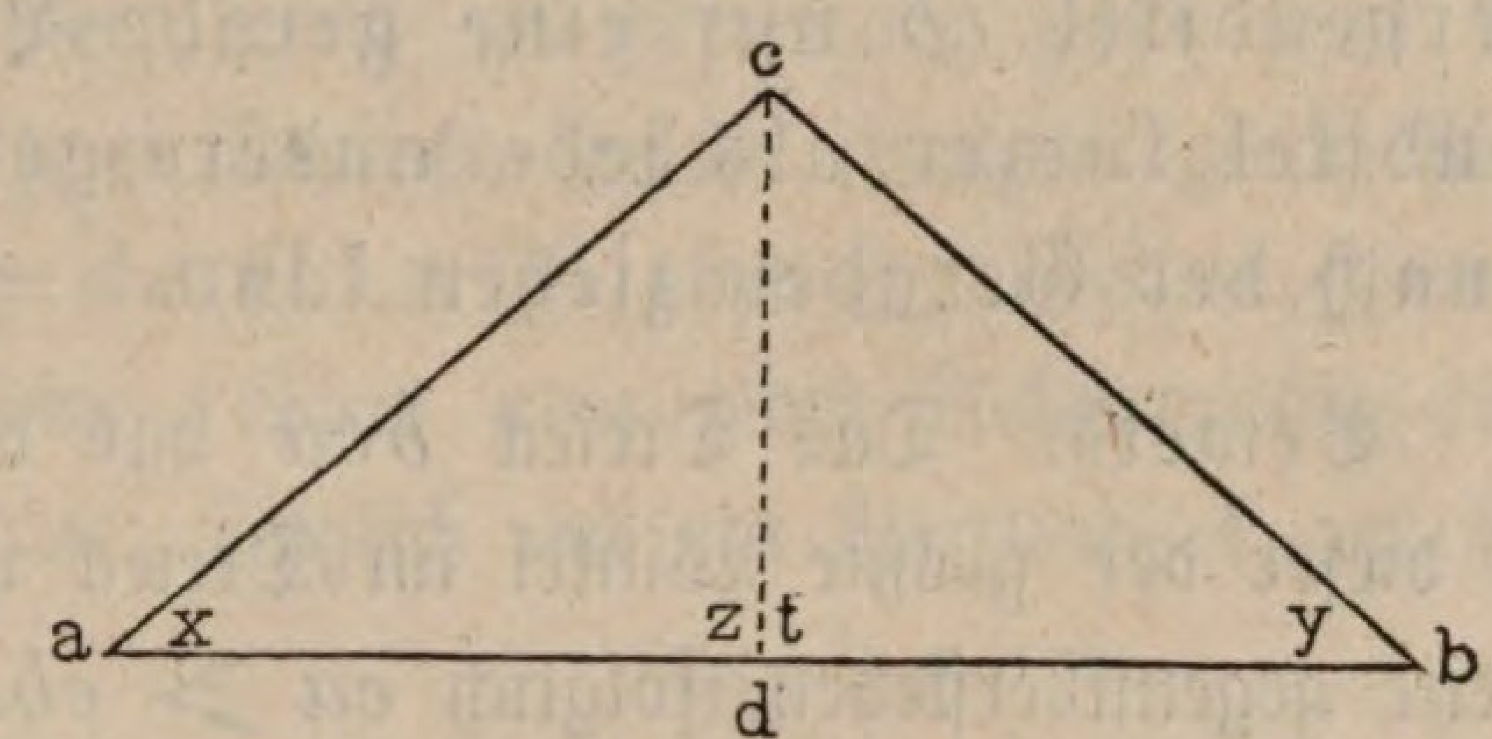


Fig. 27.



Beweis. In dem Dreieck abc (Fig. 27) sei $\measuredangle x = \measuredangle y$. Man denke sich von c ein Perpendikel auf ab gefällt, so entstehen zwei Dreiecke, welche gleich sind, denn

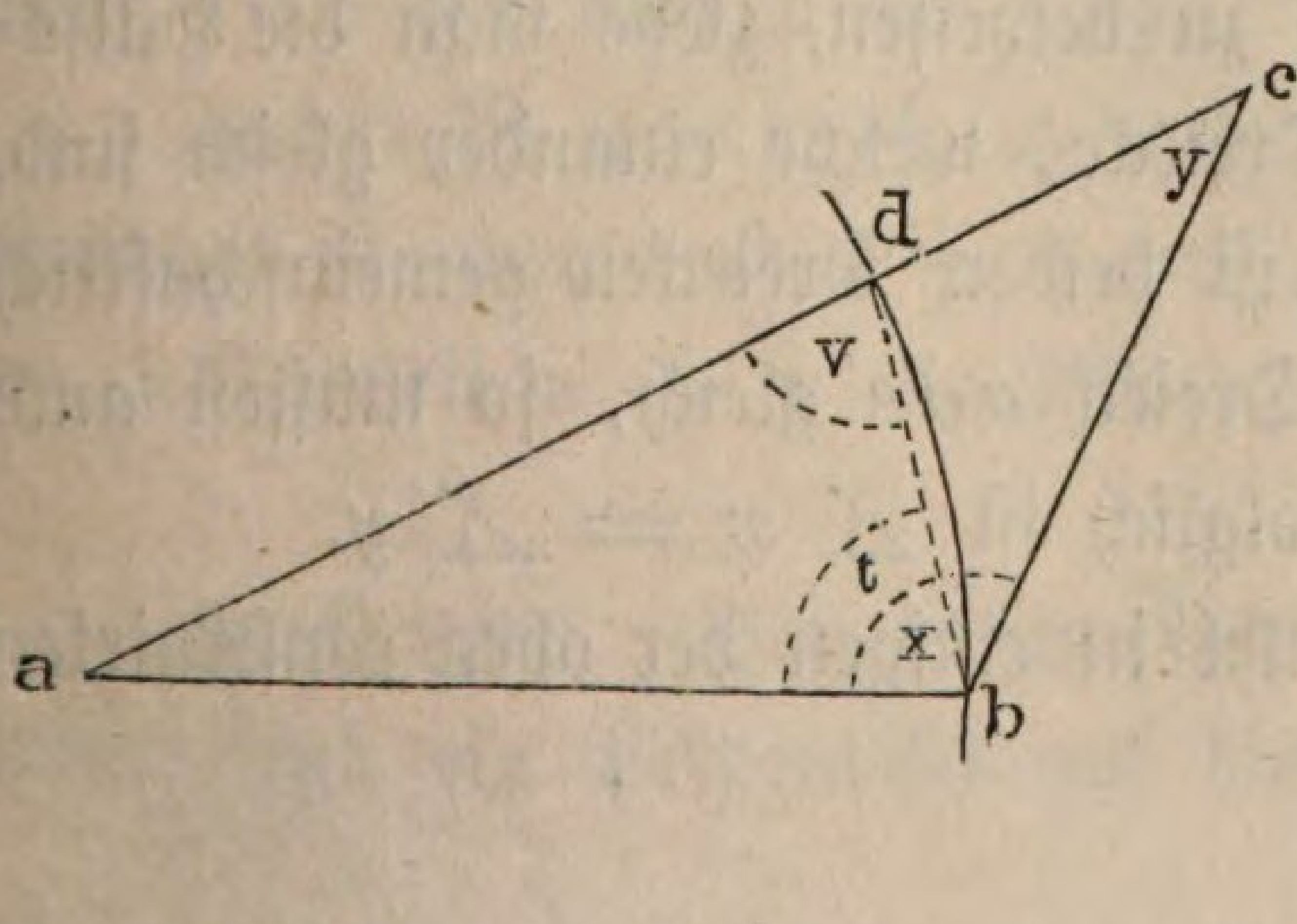
$$dc = dc$$
$$z = t \text{ (als rechte)}$$
$$x = y$$
$$\text{also } \triangle\, acd = \triangle\, bcd \text{ (5. Fall).}$$

Die beiden Dreiecke können aber nicht gleich sein, ohne daß die entsprechenden Seiten auch gleich sind, also $ac = ab$. Aus der Gleichheit der beiden Dreiecke folgt auch, daß $ad = bd$. Das von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Perpendikel halbirt also die Grundlinie.

Lehrsatz. In einem ungleichseitigen Dreiecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber. 13

Beweis. Es sei in dem Dreieck abc (Fig. 28) $ac > ba$, so muß auch $\measuredangle x > \measuredangle y$. Dies zu beweisen, mache man $ad = ab$, und ziehe die Linie db, welche den Winkel x in zwei Theile t und z theilt. (Der Buchstabe z für den Winkel dbc ist in der Figur nicht eingetragen.) Da das Dreieck adb gleichschenkelig ist, so ist $v = t$; nun ist aber $v = y + z$

Fig. 28.



(§. 9), also auch $v > y$; da aber $t = v$, so ist auch $t > y$ und um so mehr noch $x > y$, da ja t nur ein Theil von x ist.

Da in einem Dreieck der größern Seite der größere Winkel gegenübersteht, so steht auch umgekehrt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

14 **Lehrsatz.** Wenn man von einem Punkte c (Fig. 29) ein Perpendikel cb auf eine gerade Linie fällt, so ist dies Perpendikel kürzer als jede andere gerade Linie ca, die man von c nach der Geraden ziehen kann.

Beweis. Das Dreieck bca hat bei b einen rechten Winkel, und da dieser der größte Winkel im Dreieck ist, so muß ihm auch die größte Seite gegenüberstehen, folglich $ca > cb$.

Fig. 29.

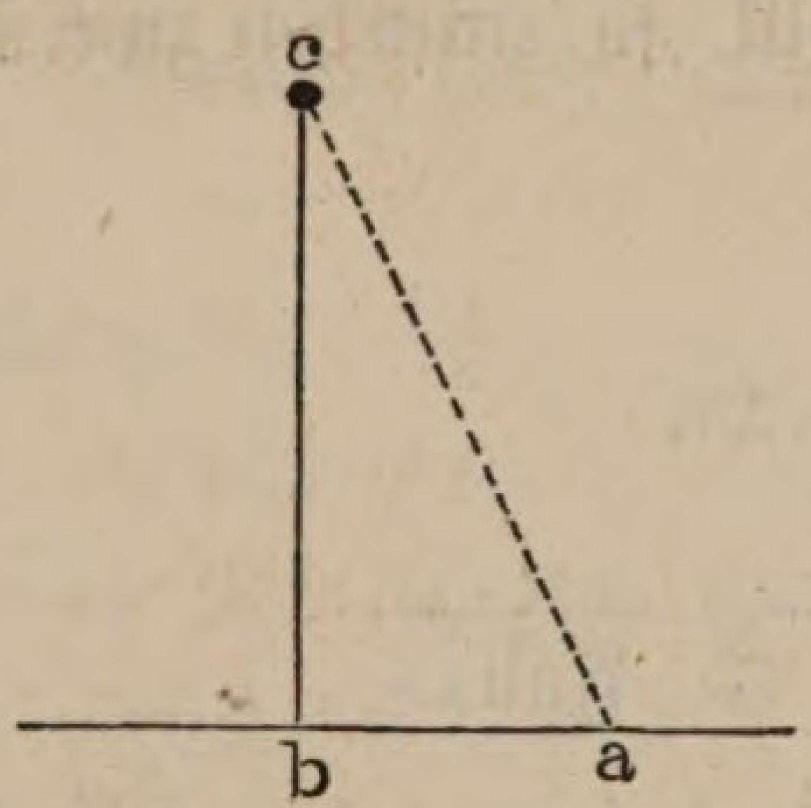
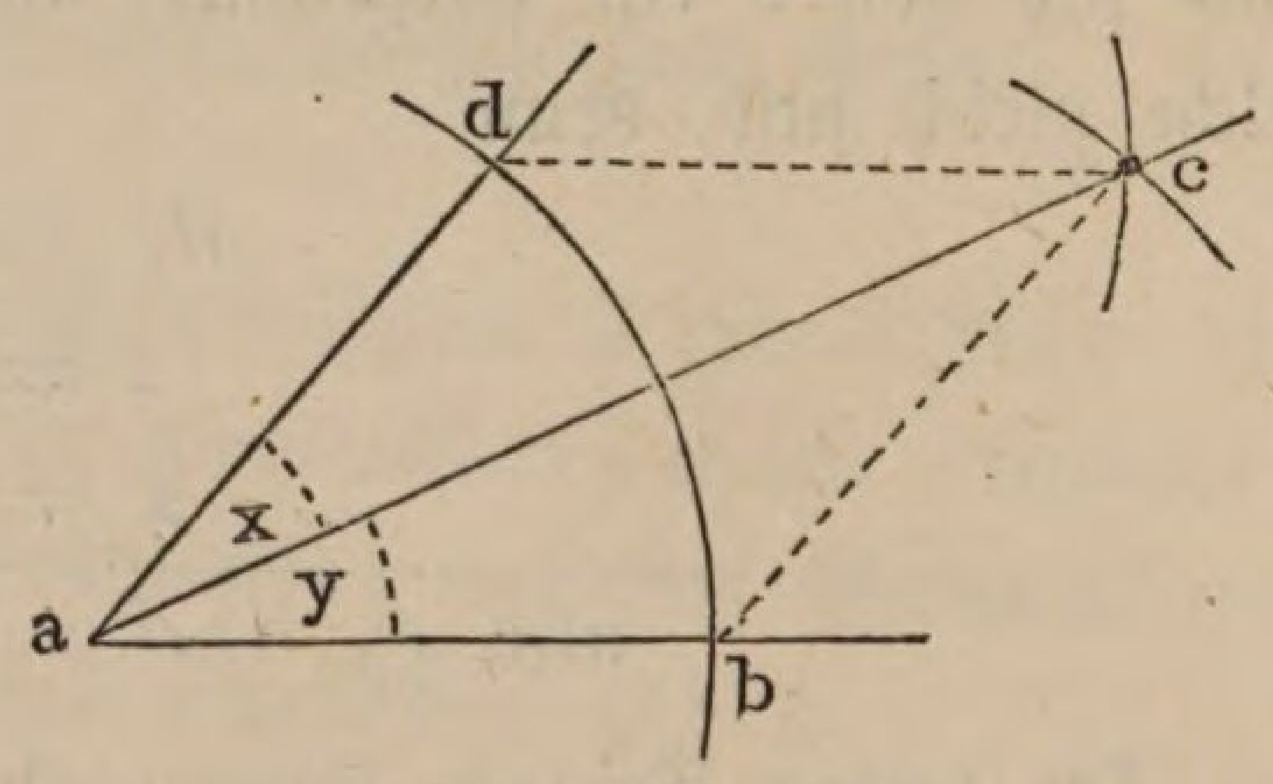


Fig. 30.



15 **Aufgabe.** Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Auflösung. Man beschreibe um die Spitze a des Winkels (Fig. 30) einen Kreisbogen mit beliebigem Radius; dieser Kreisbogen schneidet die beiden Schenkel des Winkels in zwei Punkten d und b, welche gleichweit von a abstehen. Nun beschreibe man mit einer beliebigen Zirkelöffnung um d einen Kreisbogen, und mit derselben Zirkelöffnung einen andern um b. Von dem Durchschnittspunkt c dieser beiden letzteren Bogen ziehe man eine Linie nach a, so wird diese den Winkel in zwei gleiche Theile theilen. Die Richtigkeit des Verfahrens zu beweisen, ziehe man die Hülfslinien cd und cb, so entstehen zwei Dreiecke, welche einander gleich sind, denn $ad = ab$, $dc = bc$, und ac ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich (I.). Ist aber das Dreieck abc dem Dreieck adc gleich, so müssen auch die entsprechenden Winkel gleich sein, folglich ist $\angle x = \angle y$.

Zur Uebung halbire man die Winkel in einigen der oben construirten Dreiecke.

Aufgabe. In einem Punkte a einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel zu errichten. 16

Auflösung. Man bezeichne mittelst des Zirkels auf der gegebenen Linie zwei Punkte, b und c (Fig. 31), welche gleichweit von a entfernt sind; beschreibe alsdann mit beliebiger Zirkelöffnung um c und mit derselben Zirkelöffnung um b einen Kreisbogen. Die von dem Durchschnittspunkt d derselben nach a gezogene Linie ist das verlangte Perpendikel.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen, ziehe man die Linien bd und cd, so entstehen zwei Dreiecke, welche einander gleich sind, denn $bd = dc$, $ba = ca$, $da = da$ (I.). Ist aber $\triangle\, abd = \triangle\, acd$, so muß auch $\measuredangle\, x = \measuredangle\, y$ sein. Sind aber zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein rechter, folglich ad ein Perpendikel auf bc.

Fig. 31.

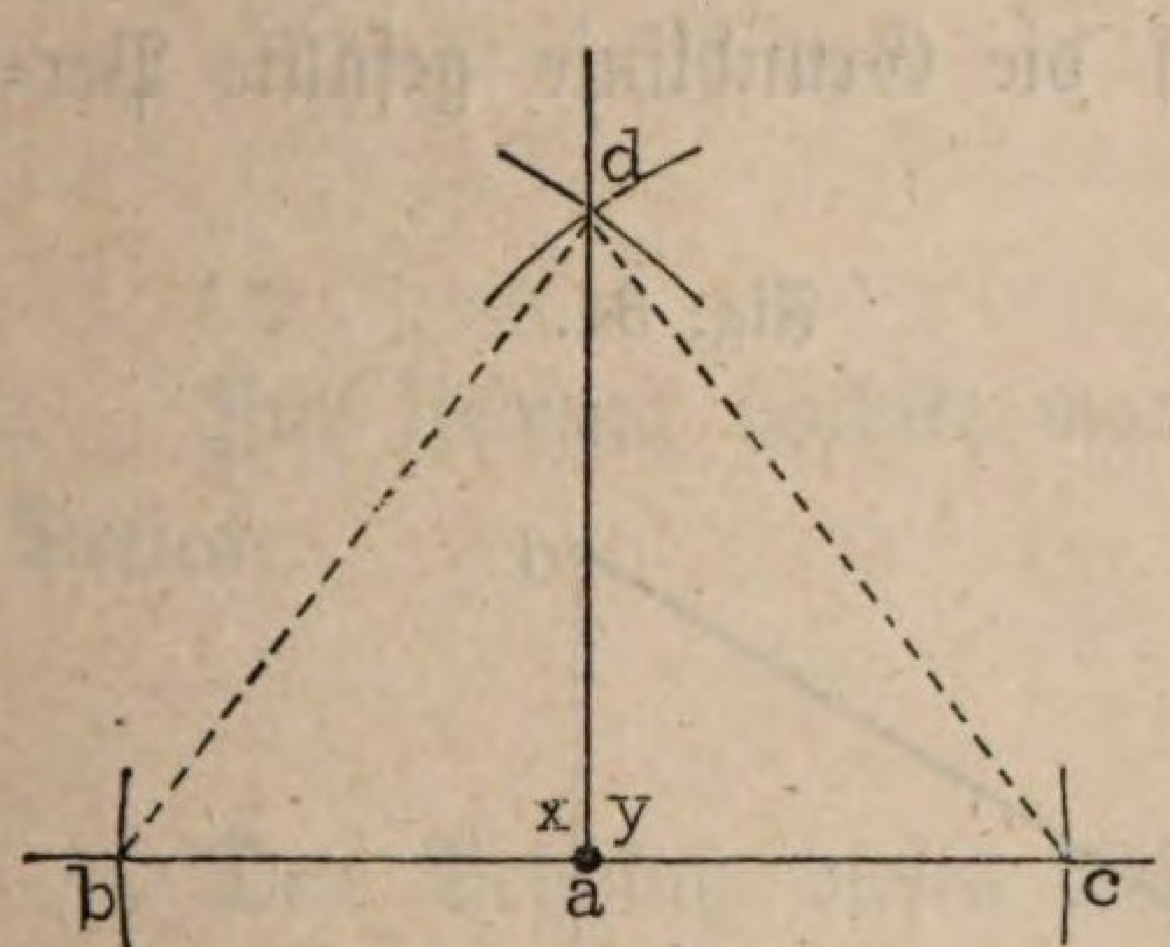
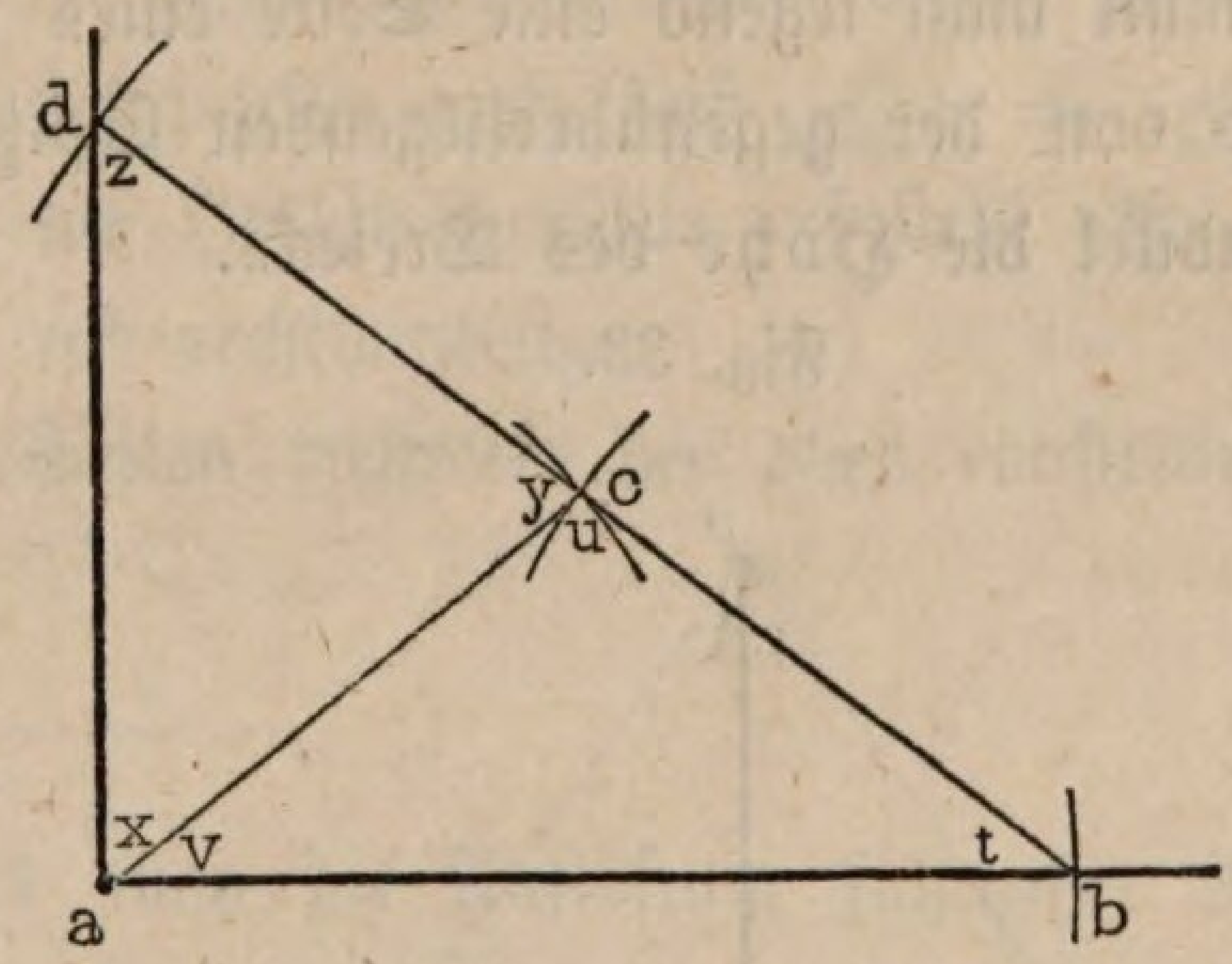


Fig. 32.



Aufgabe. Am Ende einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten, ohne die Linie zu verlängern. 17

Auflösung. Man schneide von dem Endpunkte a (Fig. 32) an, in welchem das Perpendikel errichtet werden soll, ein beliebiges Stück ab der gegebenen Linie ab, und errichte darüber ein gleichschenkeliges Dreieck abc, verlängere alsdann die Linie bc über c hinaus, und mache $cd = ca$; die von d nach a gezogene Linie ist das verlangte Perpendikel.

Beweis. $y = t + v$ (§. 9); da aber $t = v$ (§. 11), so ist auch $y = 2v$ oder $v = \frac{1}{2}y$.

Ferner ist $u = x + z$, und da $x = z$, so ist $u = 2x$, $x = \frac{1}{2}u$; demnach ist aber auch $v + x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}(u + y) = \frac{1}{2} . 2\,\mathfrak{R}. = 1\,\mathfrak{R}.$, weil $u + y = 2\,\mathfrak{R}.$

Aufgabe. Von einem Punkt c, welcher außerhalb einer gegebenen Linie liegt, ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen. 18

Auflösung. Man beschreibe um den Punkt *c* (Fig. 33) mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der die gegebene Linie in zwei Punkten *a* und *b* schneidet; ferner beschreibe man mit beliebiger Zirkelöffnung einen Bogen um *a* und mit derselben einen andern um *b*. Die vom Durchschnittspunkt *d* derselben nach *c* gezogene Linie ist das verlangte Perpendikel.

Beweis. Man ziehe die Hülfslinien *ca* und *cb*, so ist nach §. 15 der Winkel *acb* halbirt, also $z = t$. Vergleichen wir nun die Dreiecke *acf* und *bcf*, so findet sich, daß sie gleich sind, denn $ca = cb$, $cf = cf$, $z = t$ (II.). Aus der Gleichheit dieser beiden Dreiecke aber folgt die Gleichheit der Winkel *x* und *y*.

Zur Uebung fälle man in einigen der oben construirten Dreiecke von jedem Eckpunkt ein Perpendikel auf die gegenüberliegende Seite. Nimmt man irgend eine Seite eines Dreiecks als Grundlinie an, so heißt das von der gegenüberliegenden Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Höhe des Dreiecks.

Fig. 33.

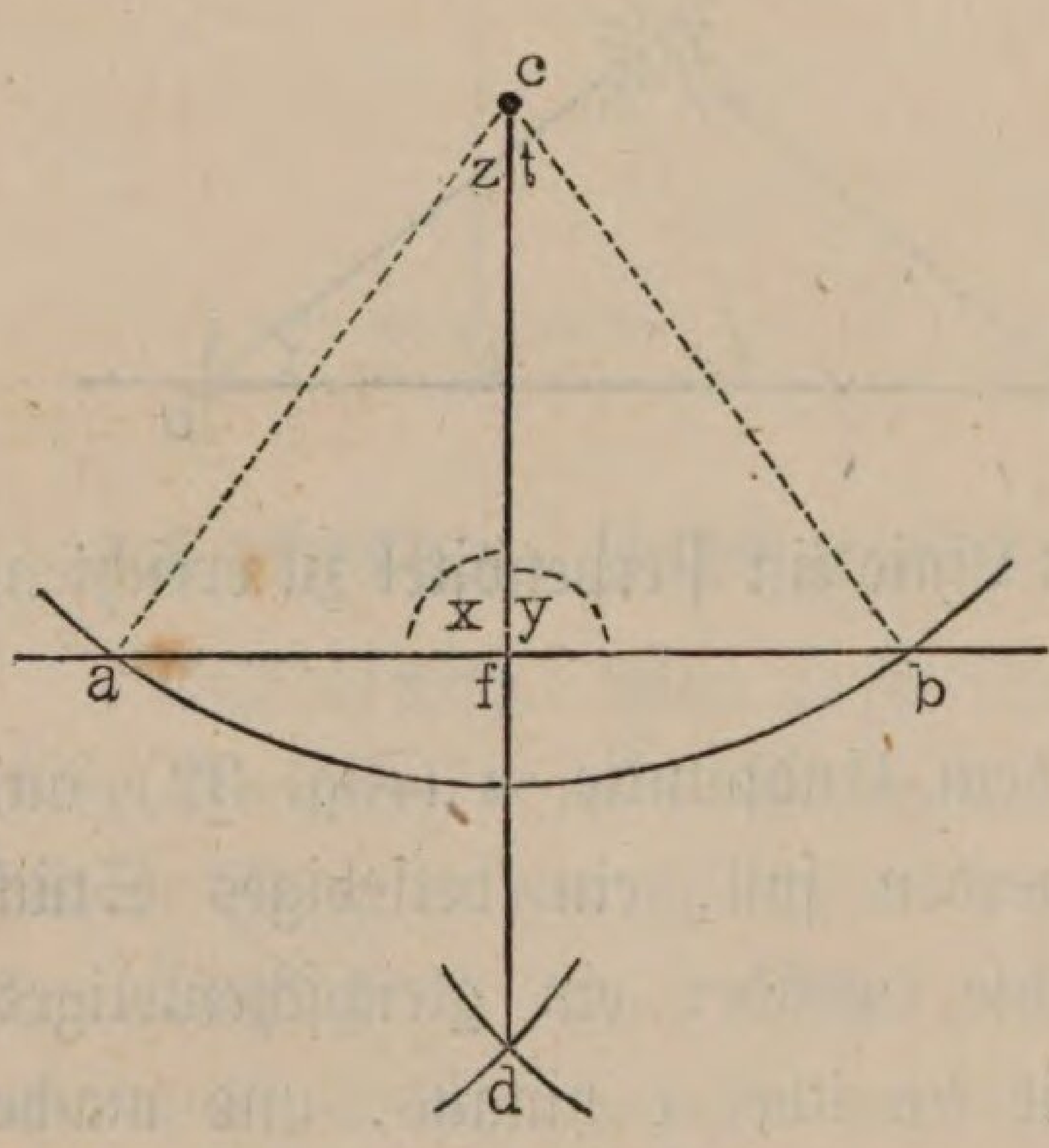
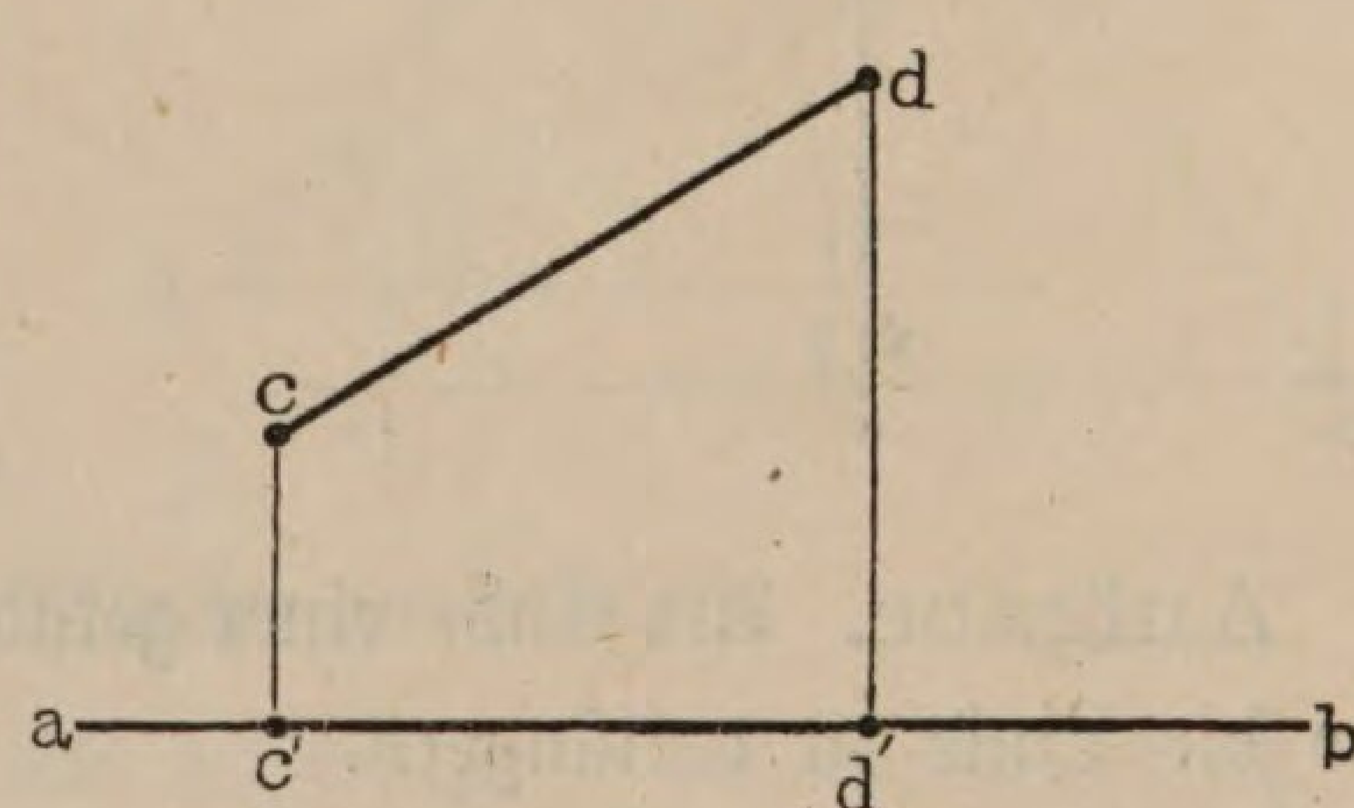


Fig. 34.



Anmerkung. Wenn man von einem Punkt *c* (Fig. 34) ein Perpendikel auf die Linie *ab* fällt, so wird der Fußpunkt *c'* dieses Perpendikels die Projection des Punktes *c* auf die Linie *ab* genannt; ebenso ist *d'* die Projection von *d*, und das Linienstück *c' d'* ist die Projection der Linie *cd* auf die Linie *ab*.

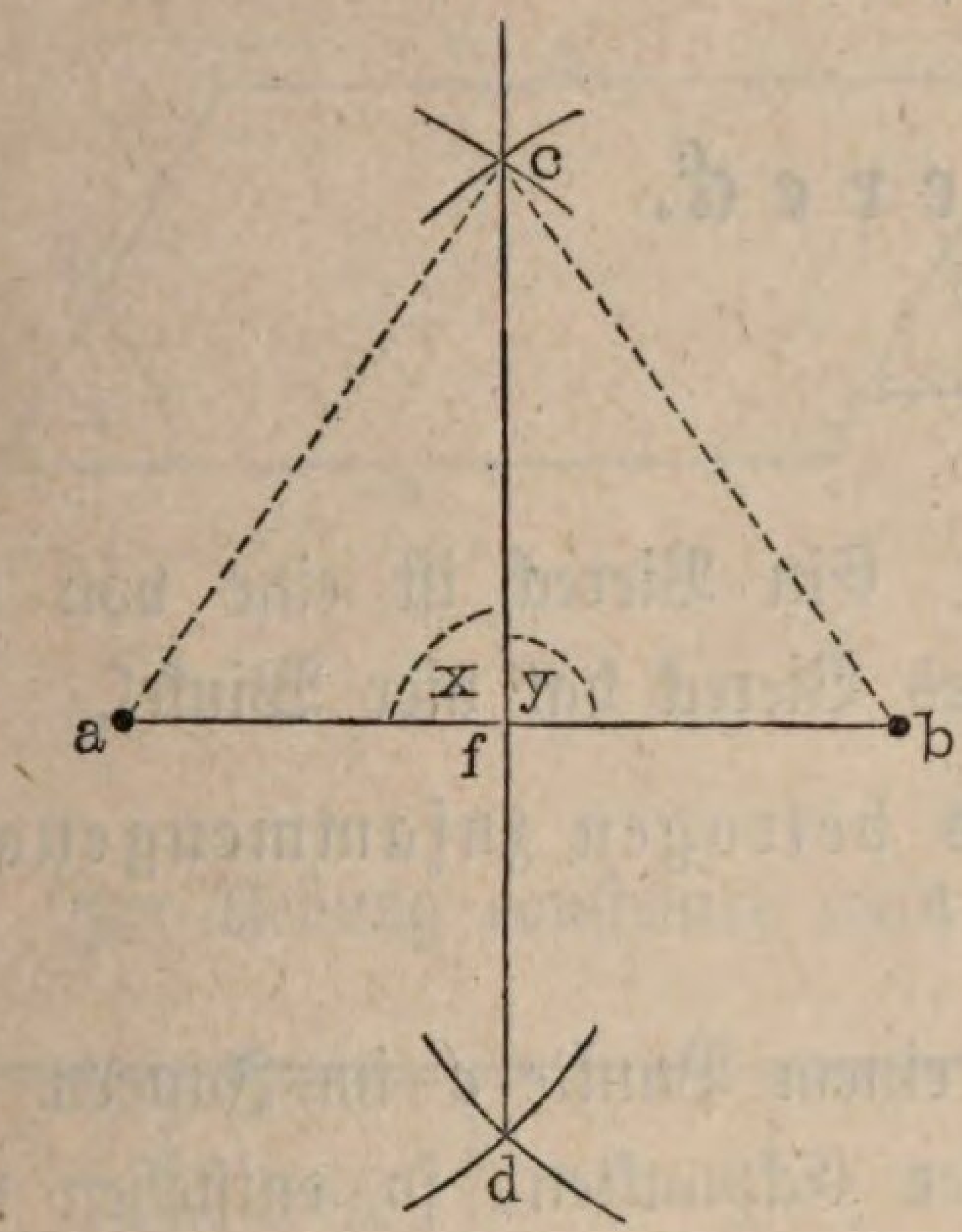
In gleicher Weise kann man einen Punkt oder eine Linie auf eine Ebene projiciren. Wenn die Linie oder die Ebene, auf welcher die Fußpunkte der gefällten Perpendikel liegen, eine horizontale ist, so heißt die so erhaltene Projection eine Horizontalprojection.

19 **Aufgabe.** Eine gegebene gerade Linie *ab* (Fig. 35) zu halbiren.

Auflösung. Man beschreibe mit beliebiger aber gleicher Zirkel=

öffnung um a und b (Fig. 35) zwei Kreisbogen über ab. Der Durchschnittspunkt derselben sei mit c bezeichnet. Alsdann beschreibe man mit beliebigem aber gleichem Halbmesser um a und b Kreisbogen unterhalb ab; ihr Durchschnittspunkt sei mit d bezeichnet. Zieht man nun die Linie cd, so schneidet sie die gegebene in zwei gleiche Theile.

Fig. 35.



Beweis. Man ziehe ca und cb, so läßt sich, wie in §. 18, die Gleichheit der Dreiecke acf und bcf beweisen, woraus folgt, daß auch $af = bf$.

Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt aber auch, daß $\measuredangle x = \measuredangle y$; die Halbirungslinie cd steht also auf ab rechtwinkelig.

Zur Uebung halbire man die Seiten mehrerer der oben construirten Dreiecke.

Den Beschluß dieses Abschnitts mag die Auflösung folgender Aufgaben machen.

Dreiecke zu construiren, für welche gegeben ist:

1. $a\ b\ h$	4. $b\ B\ h$
2. $a\ B\ h$	5. $B\ C\ h$.
3. $b\ c\ h$	

Die Buchstaben a, b, c, B, C haben hier dieselbe Bedeutung wie oben; h bezeichnet die Höhe, d. h. die Länge des auf die Seite a von der ihr gegenüberliegenden Spitze gefällten Perpendikels. Die Angabe specieller Werthe für die gegebenen Stücke bleibt dem mündlichen Unterricht überlassen. Es ist nur noch zu bemerken, daß b sowohl als c größer sein müssen, als h, wenn eine Auflösung möglich sein soll. Warum?

Drittes Kapitel.

Vom Viereck.

20 **Die Winkel des Vierecks.** Ein Viereck ist eine von vier Seiten eingeschlossene ebene Figur. Jedes Viereck hat vier Winkel.

Die vier Winkel eines Vierecks betragen zusammengenommen vier Rechte.

Beweis. Man ziehe von irgend einem Punkte *c* im Innern des Vierecks (Fig. 36) Linien nach den vier Eckpunkten, so entstehen vier Dreiecke. Die Summe der Winkel in jedem Dreieck beträgt 2 R., also die Summe der Winkel in allen vier Dreiecken 8 R. Zieht man von diesen 4 R. ab, welche um den Punkt *c* liegen, so bleiben 4 R. als Summe der Eckwinkel des Vierecks übrig.

Fig. 36.

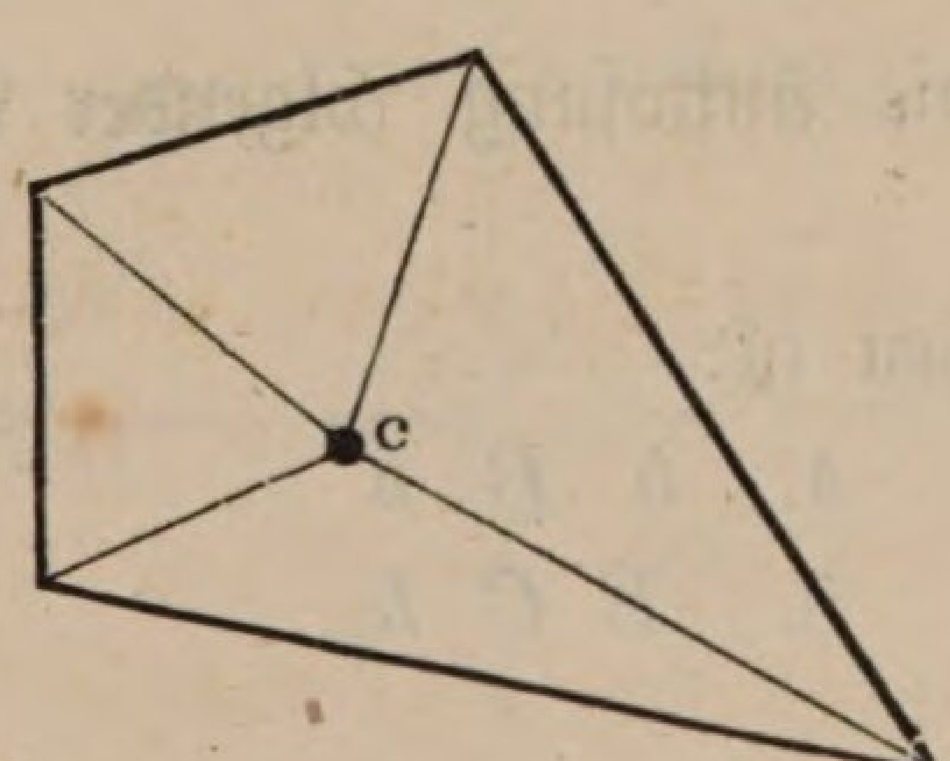
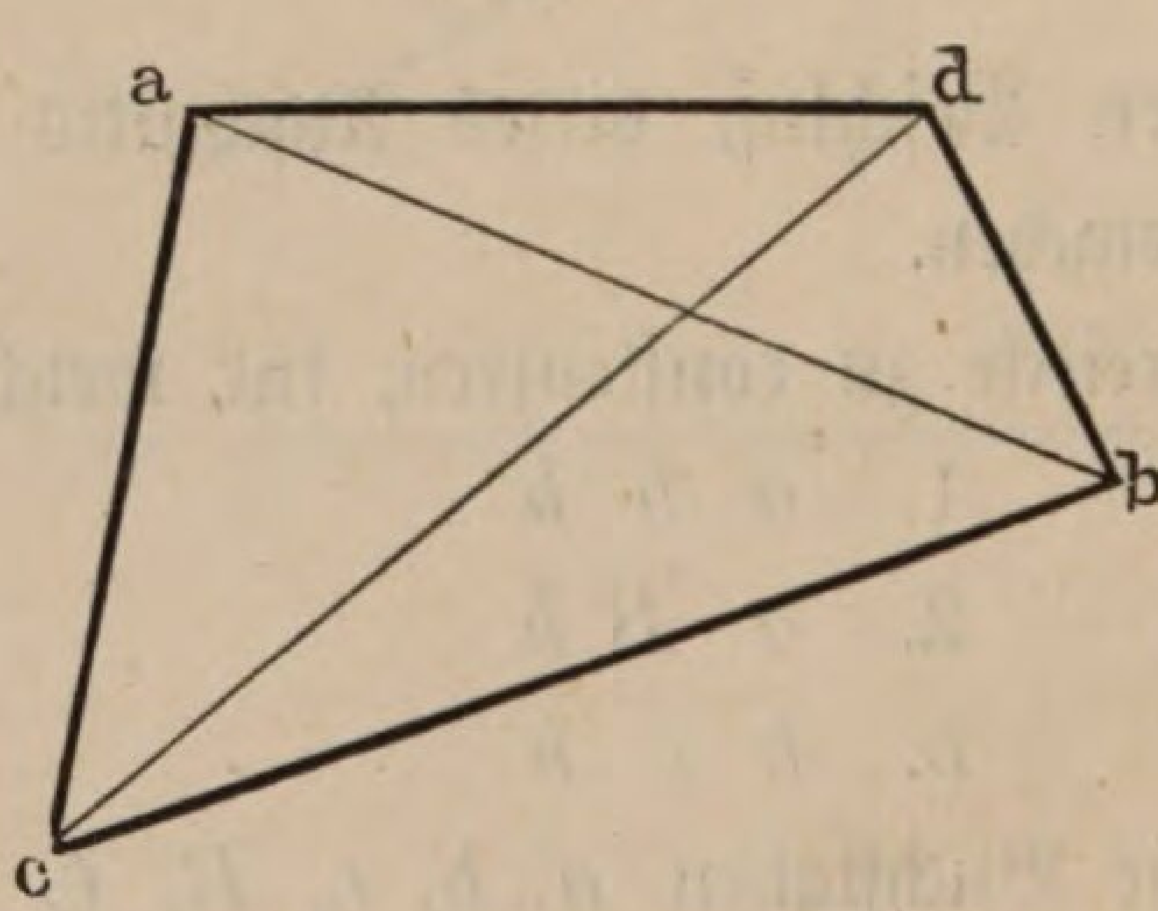


Fig. 37.



21 **Die Diagonale.** Jede von einem Eckpunkt des Vierecks durch die Figur zum gegenüberstehenden Eck gezogene Linie heißt Diagonale.

In einem jeden Viereck kann man zwei Diagonalen ziehen; in dem Viereck (Fig. 37) z. B. ist *ab* die eine, *cd* die andere Diagonale.

22 **Das Parallelogramm.** Sind je zwei Seiten eines Vierecks einander parallel, wie in Fig. 38 und Fig. 39, so heißt die Figur Parallelogramm. Nennen wir die Grundlinie eines Parallelogramms *a*, die ihr gegenüberstehende *a'*, die Seite links *b*, die ihr gegenüberstehende *b'*, so müssen *a* und *a'*, *b* und *b'* parallel sein. Den Winkel, den die

Seiten a und b mit einander machen, wollen wir in den folgenden Beispielen mit x bezeichnen.

Fig. 38.

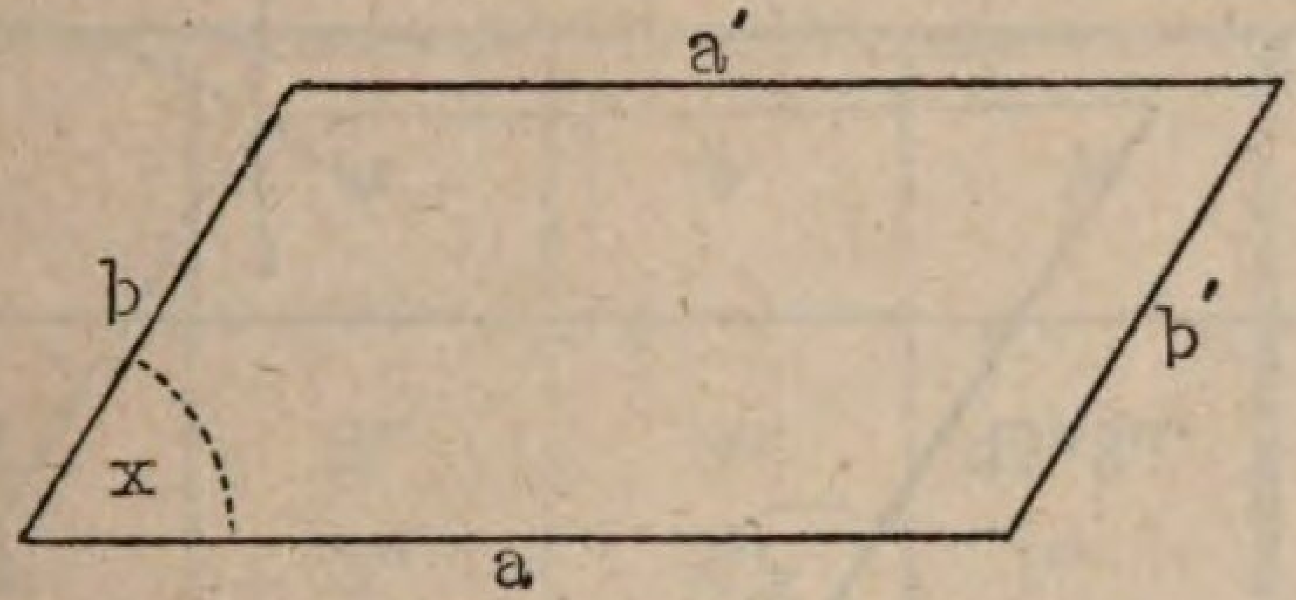
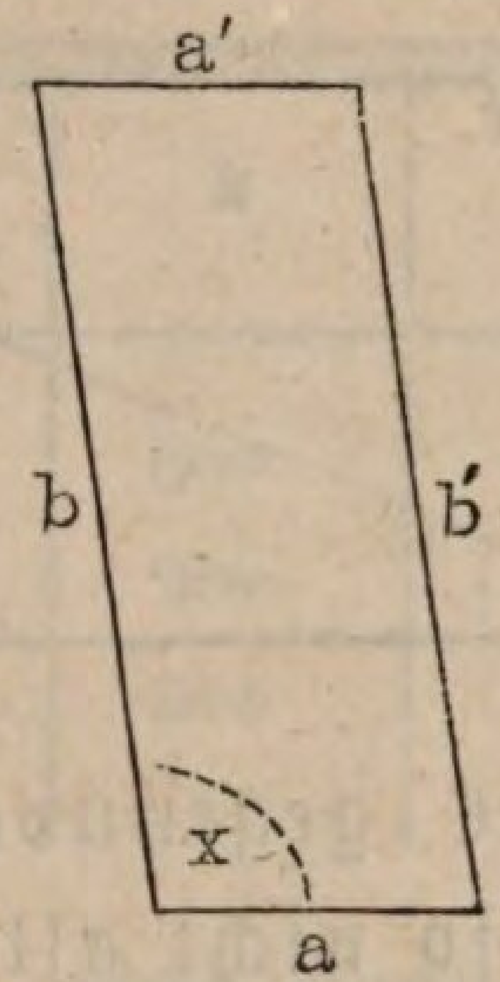


Fig. 39.



Zur Uebung construire man folgende Parallelogramme:

	a	b	x		a	b	x
1.	2″	3″	50°	5.	6cm	9cm	60°
2.	3″	2″	120°	6.	9cm	9cm	100°
3.	1″	2″	70°	7.	6cm	9cm	120°
4.	3″	1″	100°	8.	12cm	9cm	77°

Hat man die Seiten a und b im gehörigen Winkel aneinander gesetzt, so vollendet man das Parallelogramm, indem man a' mit a und b' mit b parallel zieht.

Aus §. 7 folgt, daß die beiden Winkel eines Parallelogramms, welche an derselben Seite liegen, zusammen 2 R. betragen, woraus sich auch ergiebt, daß die gegenüberstehenden Winkel eines Parallelogramms gleich sind.

Lehrsatz. Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei gleiche Dreiecke getheilt. 23

Beweis. Man ziehe in dem Parallelogramm $pqrs$ (Fig. 40) die Diagonale ps, so ist das Dreieck prs gleich pqs, denn

$$ps = ps$$
$$\left.\begin{array}{l} y = z \\ x = t \end{array}\right\} \text{als Wechselwinkel,}$$

also $\triangle\, prs = \triangle\, pqs$ (IV.).

Da aber diese Dreiecke einander gleich sind, so müssen auch die entsprechenden Seiten einander gleich sein; also $rs = pq$, $pr = qs$.

Fig. 40.

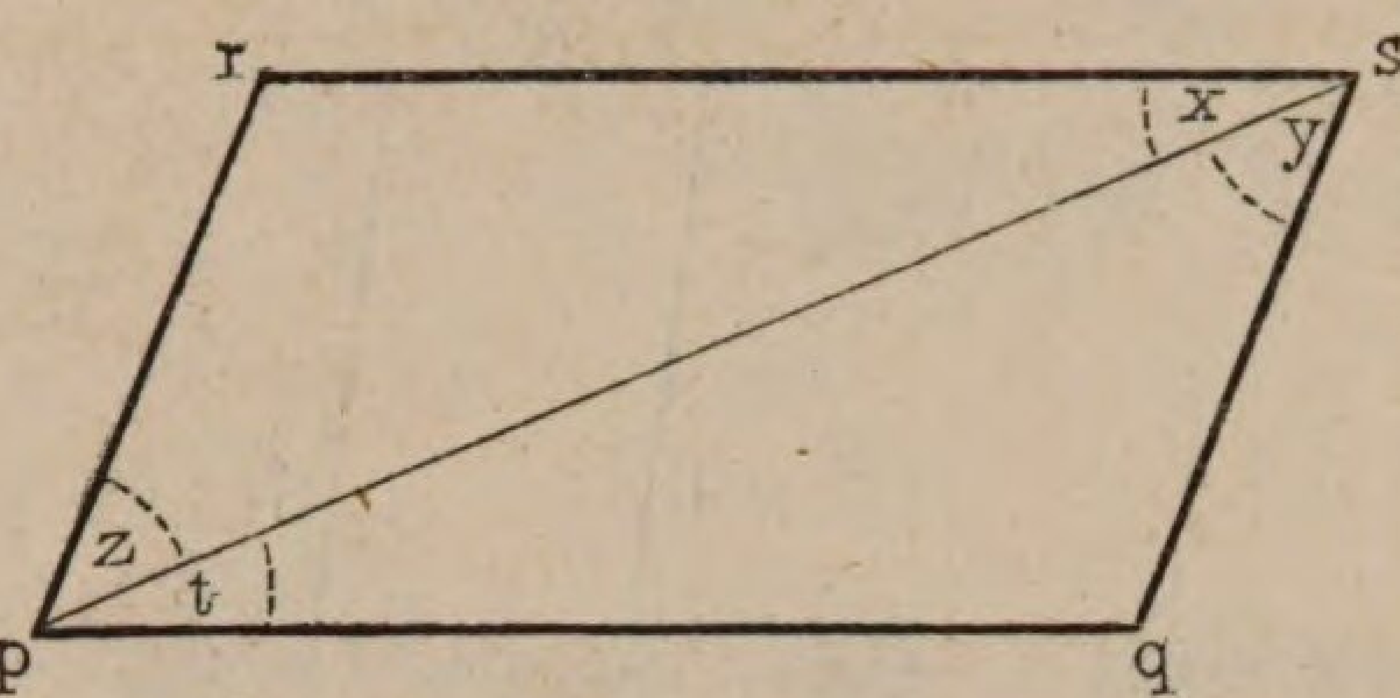
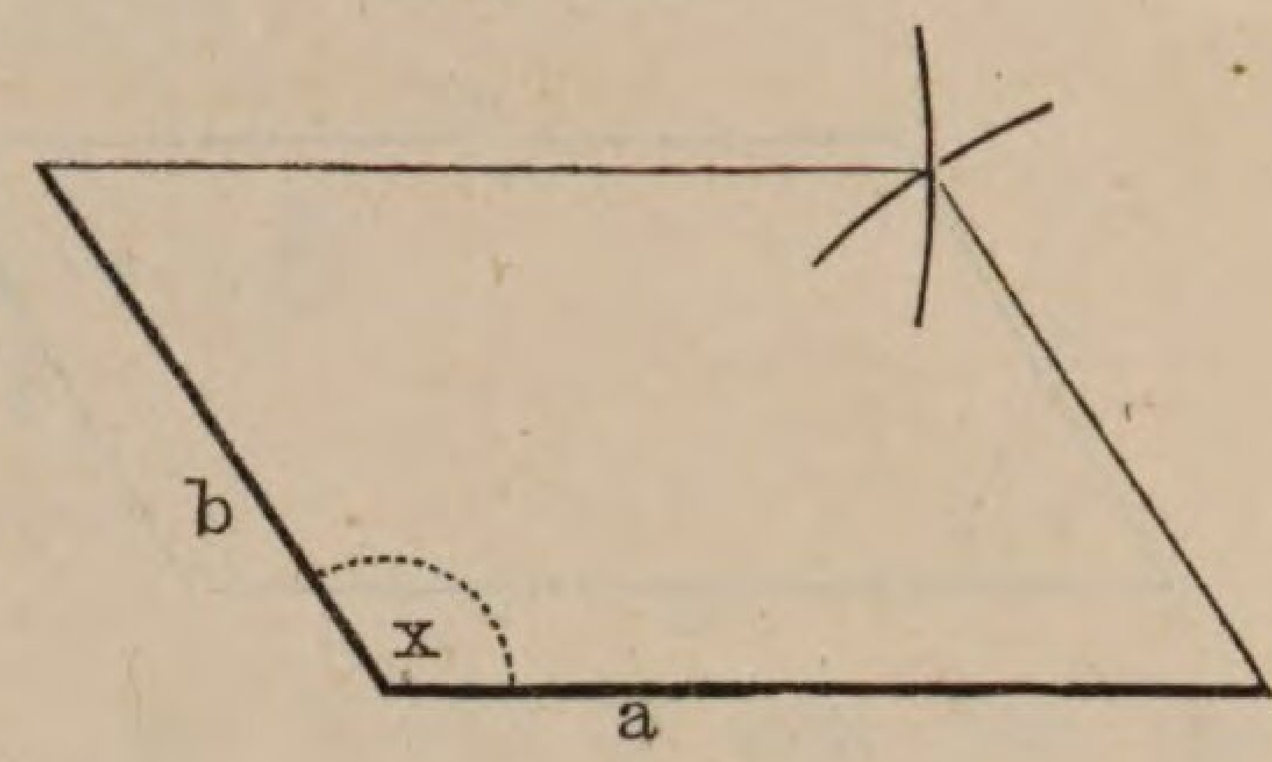


Fig. 41.



Die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms sind also nicht allein parallel, sondern auch gleich.

Demnach kann man, wenn man die Seiten a und b im gehörigen Winkel zusammengestellt hat, das Parallelogramm auch mit Hülfe von Kreisbogen, deren Radien a und b sind, vollenden, wie in Fig. 41 angedeutet ist. Nach dieser Methode construire man folgende Parallelogramme:

	a	b	x
1.	2″	2″	100°
2.	3″	3″	60°
3.	9cm	6cm	90°
4.	9cm	6cm	134°

24 **Die Höhe des Parallelogramms.** Betrachtet man a als die Grundlinie des Parallelogramms, so ist ein von irgend einem Punkte der Seite a' auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefälltes Perpendikel h

Fig. 42.

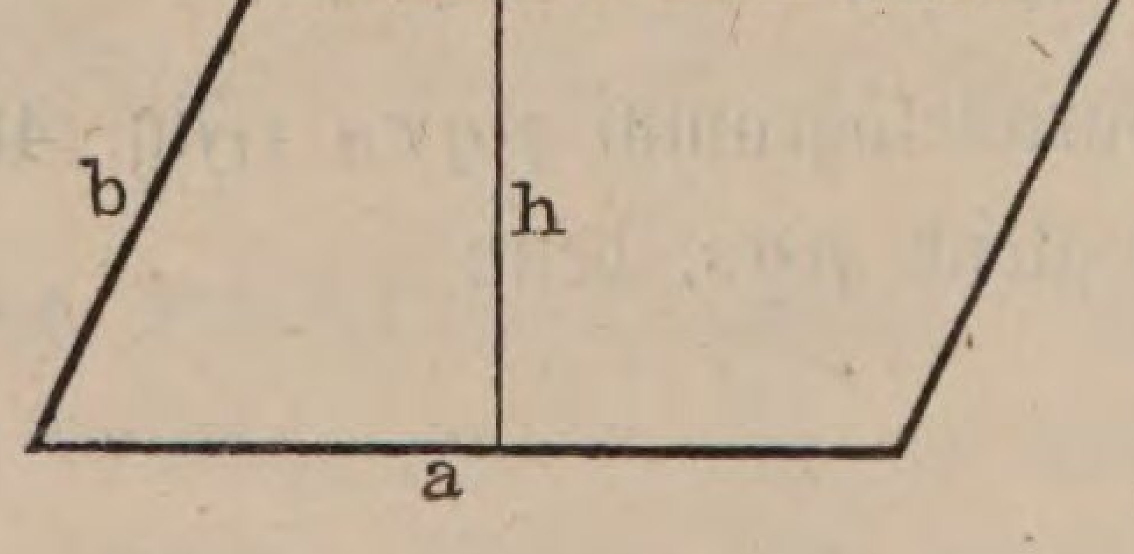
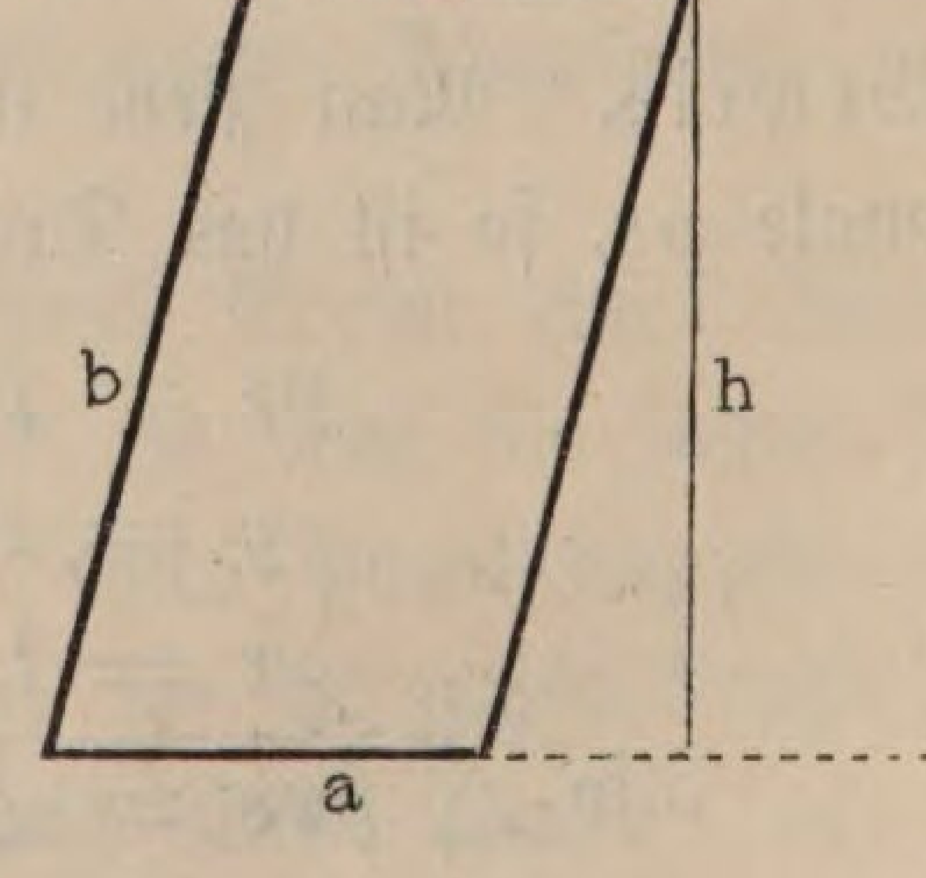


Fig. 43.



(Fig. 42 und Fig. 43) die Höhe des Parallelogramms. Wie groß ist die Höhe der nach obigen Angaben construirten Parallelogramme?

Zur Uebung construire man noch folgende Parallelogramme:

	a	*b*	*h*		*a*	*h*	*x*
1.	2″	3″	2″3‴	4.	9cm	6cm	110°
2.	3″	2″	1″	5.	6cm	9cm	48°
3.	4″	3″	2″	6.	12cm	6cm	72°

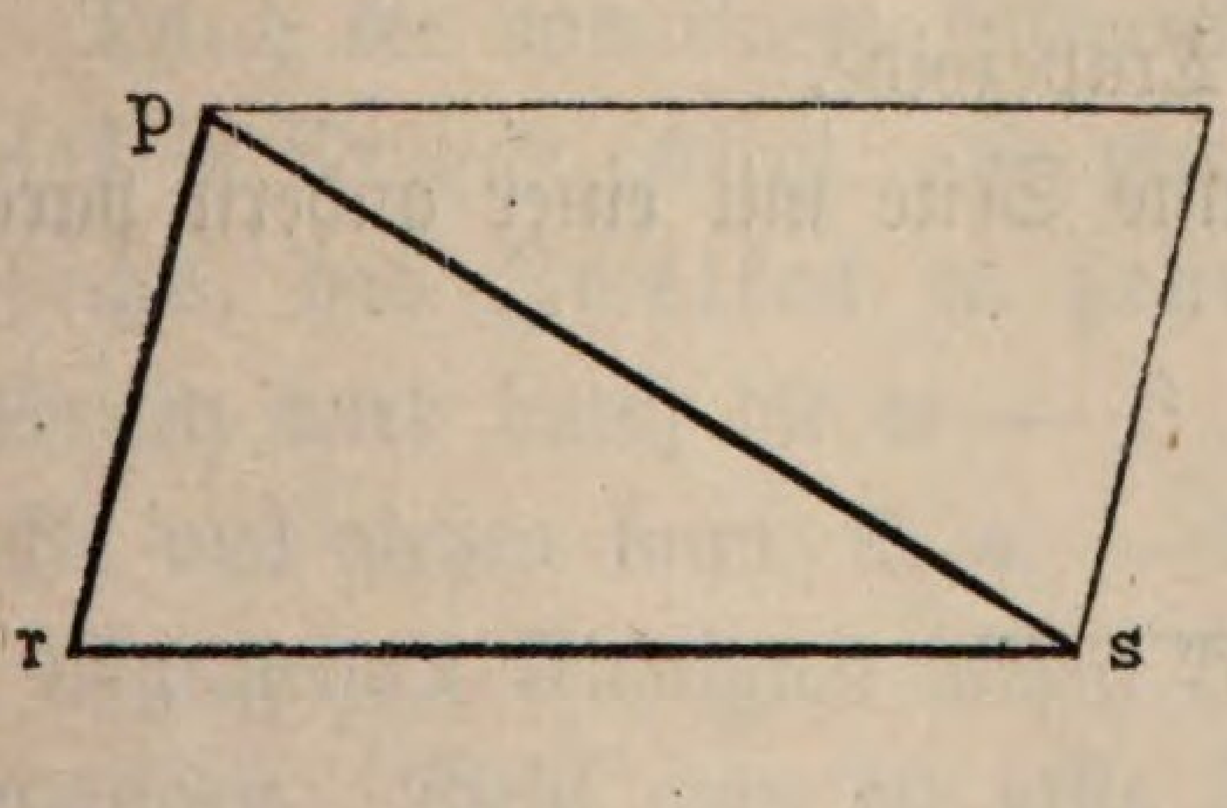
Betrachtet man *b* als Grundlinie, so ist ein von irgend einem Punkte der Seite *b′* auf *b* oder dessen Verlängerung gefälltes Perpendikel *h′* die Höhe des Parallelogramms. Wie groß ist in diesem Falle die Höhe der construirten Parallelogramme?

Zur Uebung construire man noch folgende Parallelogramme, in welchen die Länge des von *b′* auf *b* gefällten Perpendikels *h′* gegeben ist.

	b	*h′*	*x*
1.	3″	2″	120°
2.	2″	3″	60°
3.	4″	3″	113°

Zieht man durch den Eckpunkt *p* des Dreiecks *prs* (Fig. 44) eine Linie parallel mit *rs*, durch *s* eine andere parallel mit *rp*, so entsteht ein Parallelogramm, welches mit dem Dreieck gleiche Grundlinie und Höhe hat. Nach §. 23 aber ist das Dreieck *prs* die Hälfte dieses Parallelogramms.

Fig. 44.



Ein Dreieck ist also die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

25 **Quadrat, Raute, Rechteck und Trapez.** Sind die vier Seiten eines Parallelogramms einander gleich und alle Winkel rechte, wie Fig. 45, so heißt es Quadrat. Welche der oben construirten Parallelogramme sind Quadrate?

Fig. 45.

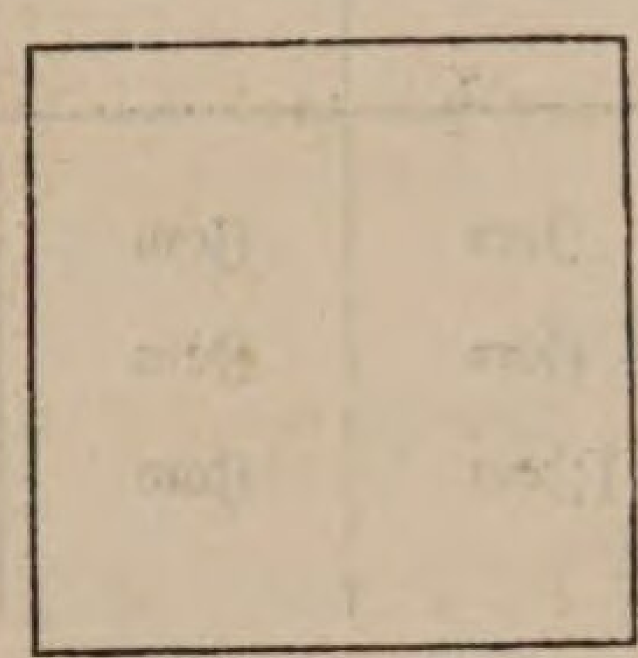
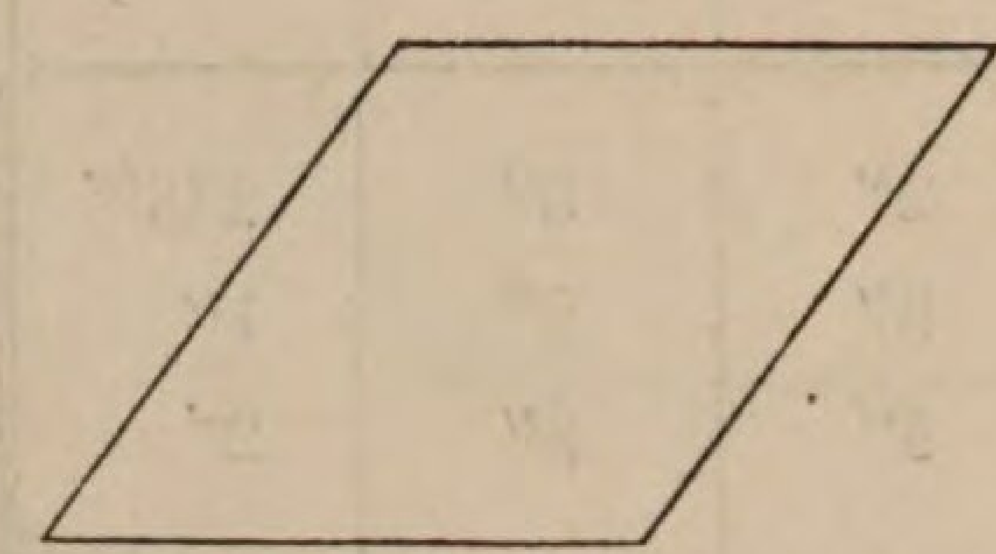


Fig. 46.



Sind die vier Seiten eines Parallelogramms einander gleich, ohne daß die Winkel rechte sind, wie Fig. 46, so heißt die Figur Rhombus oder Raute. Welche der construirten Figuren sind Rauten?

Sind alle Winkel eines Parallelogramms rechte, ohne daß alle Seiten gleich sind, wie Fig. 47, so heißt es längliches Rechteck oder Rectangel. Welche der construirten Figuren sind längliche Rechtecke?

Fig. 47.

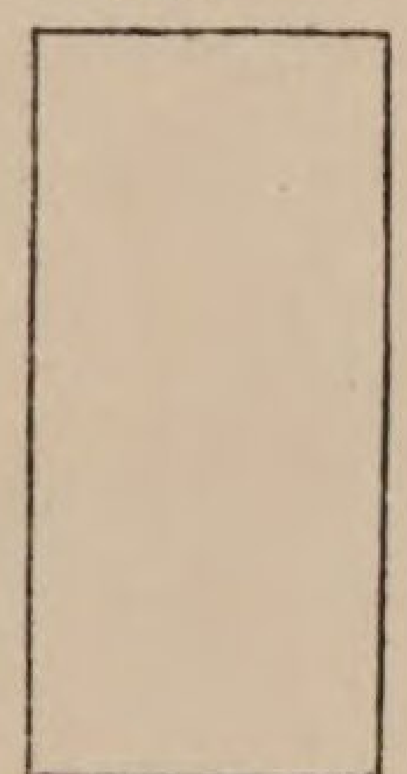


Fig. 48.

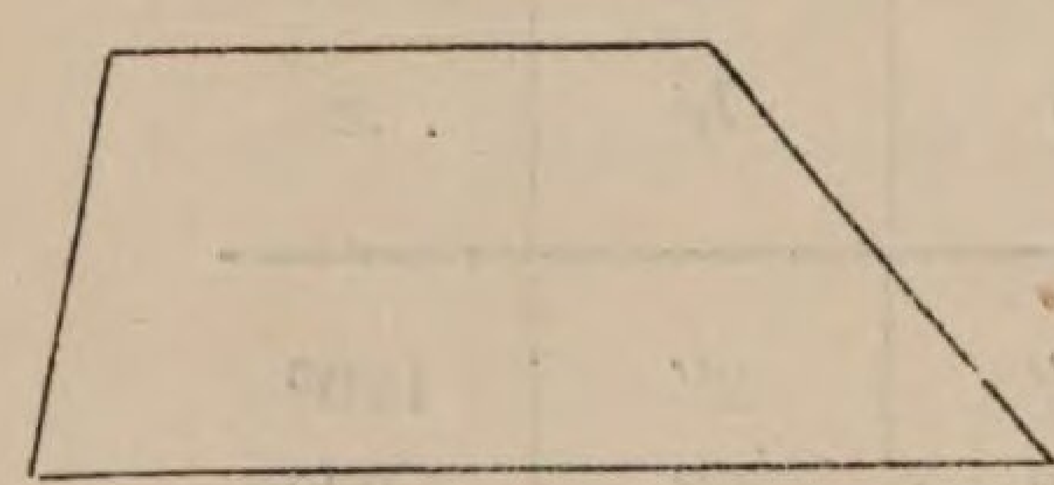
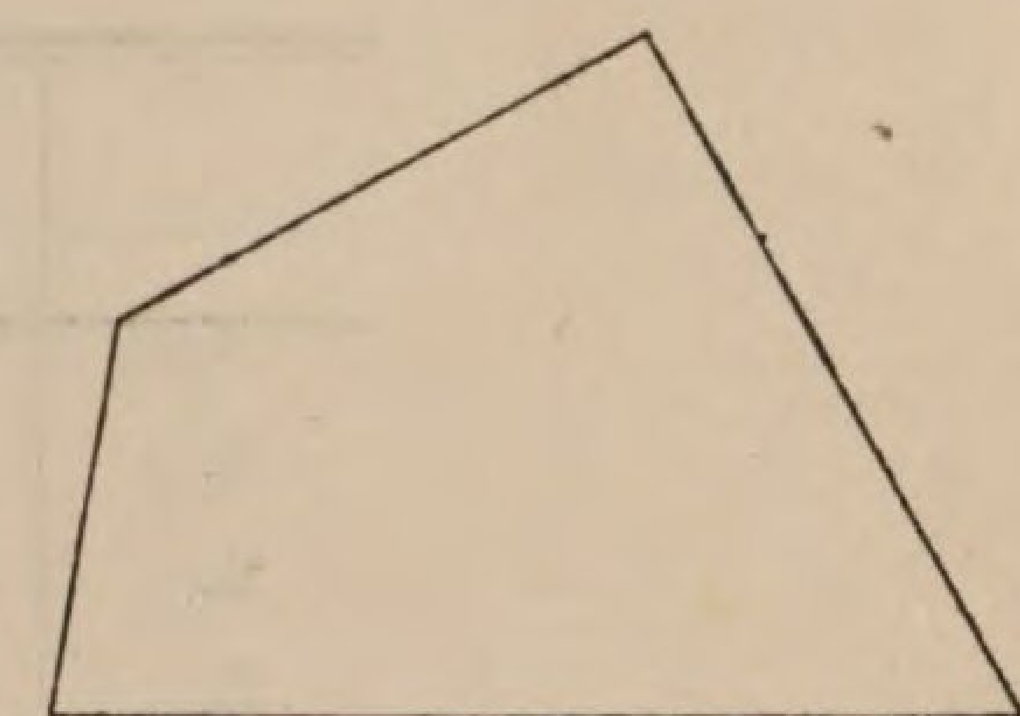


Fig. 49.



Sind in einer vierseitigen Figur zwei Seiten parallel, die beiden anderen aber nicht, wie Fig. 48, so heißt sie Paralleltrapez oder Trapezoid.

Zur Uebung zeichne man einige Trapezoide.

Ist in einer vierseitigen Figur keine Seite mit einer andern parallel, wie Fig. 49, so heißt sie Trapez.

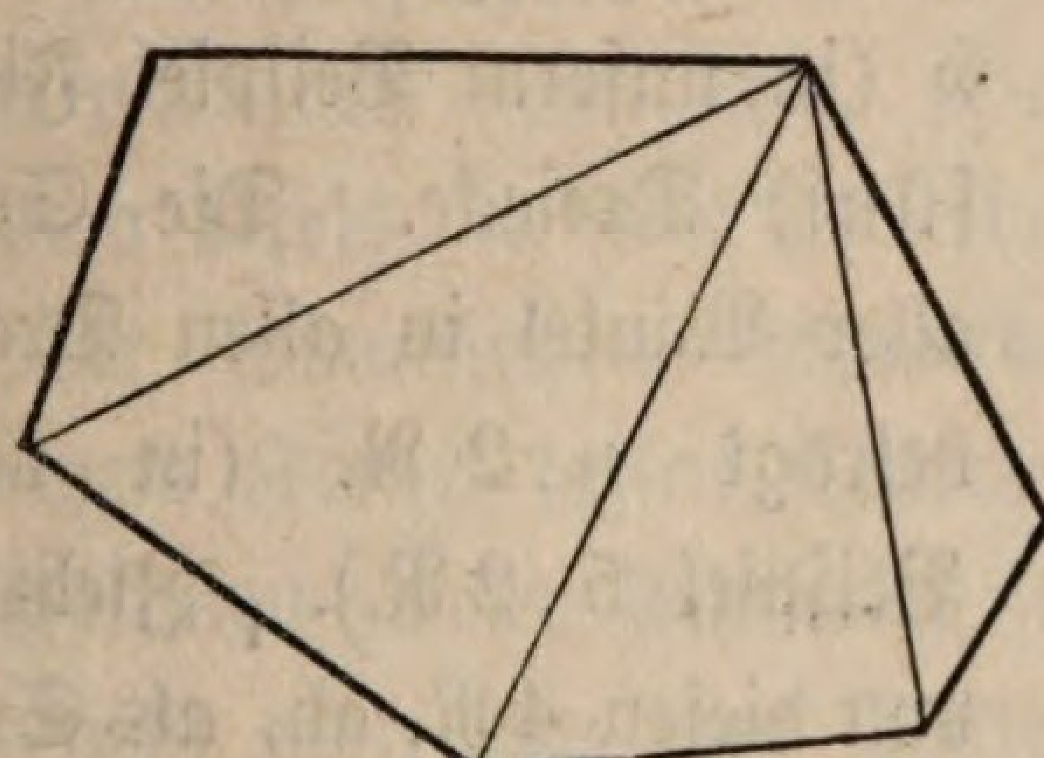
Viertes Kapitel.

Von den Vielecken.

Die Diagonalen der Vielecke. Vielecke nennt man zwar 26
im Allgemeinen alle von geraden Linien begränzten ebenen Figuren; vorzugsweise jedoch bezeichnet man nur diejenigen damit, welche mehr als vier Ecken haben; also Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke u. s. w.

Von jedem Eckpunkte eines Sechsecks (Fig. 50) lassen sich 5 Linien nach den übrigen fünf Eckpunkten, von jedem Zehneckspunkte 9 Linien nach den übrigen neun Eckpunkten der Figur ziehen u. s. w. Man kann allgemein sagen: hat ein Vieleck n Seiten, so kann man von einem Eckpunkte aus nach den übrigen $n - 1$ Ecken, $n - 1$ Linien ziehen. Die zwei äußersten dieser Linien gehören zu den Umgränzungslinien der Figuren, die $n - 3$ übrigen sind Diagonalen. In einem Vieleck von n Seiten kann man also von einem Eckpunkte aus $n - 3$ Diagonalen ziehen.

Fig. 50.



Wieviel Diagonalen kann man von einem Eckpunkte aus in einem Siebeneck, Achteck u. s. w. ziehen?

Dieser Satz gilt für alle Vielecke, also auch für Dreiecke und Vierecke. Für ein Dreieck ist demnach die von einem Eckpunkte aus gezogene Anzahl der Diagonalen $3 - 3 = 0$, für das Viereck $4 - 3 = 1$.

Durch die von einem Eckpunkte aus gezogenen Diagonalen wird ein Vieleck in Dreiecke zerlegt, und zwar das Sechseck in vier, das Achteck in sechs, das Zwölfeck in zehn; oder allgemein: Jedes Vieleck von n Seiten wird durch die $n - 3$ Diagonalen, die man von einem Eckpunkte aus ziehen kann, in $n - 2$ Dreiecke zerlegt. Man kann sich von der allgemeinen Richtigkeit dieser Behauptung durch folgende Betrachtung überzeugen. Zieht man die erste Diagonale, so wird ein Dreieck von der Figur abgeschnitten, durch eine zweite ein zweites, durch eine dritte ein drittes u. s. w. Hat man so alle Diagonalen, bis auf die letzte, also

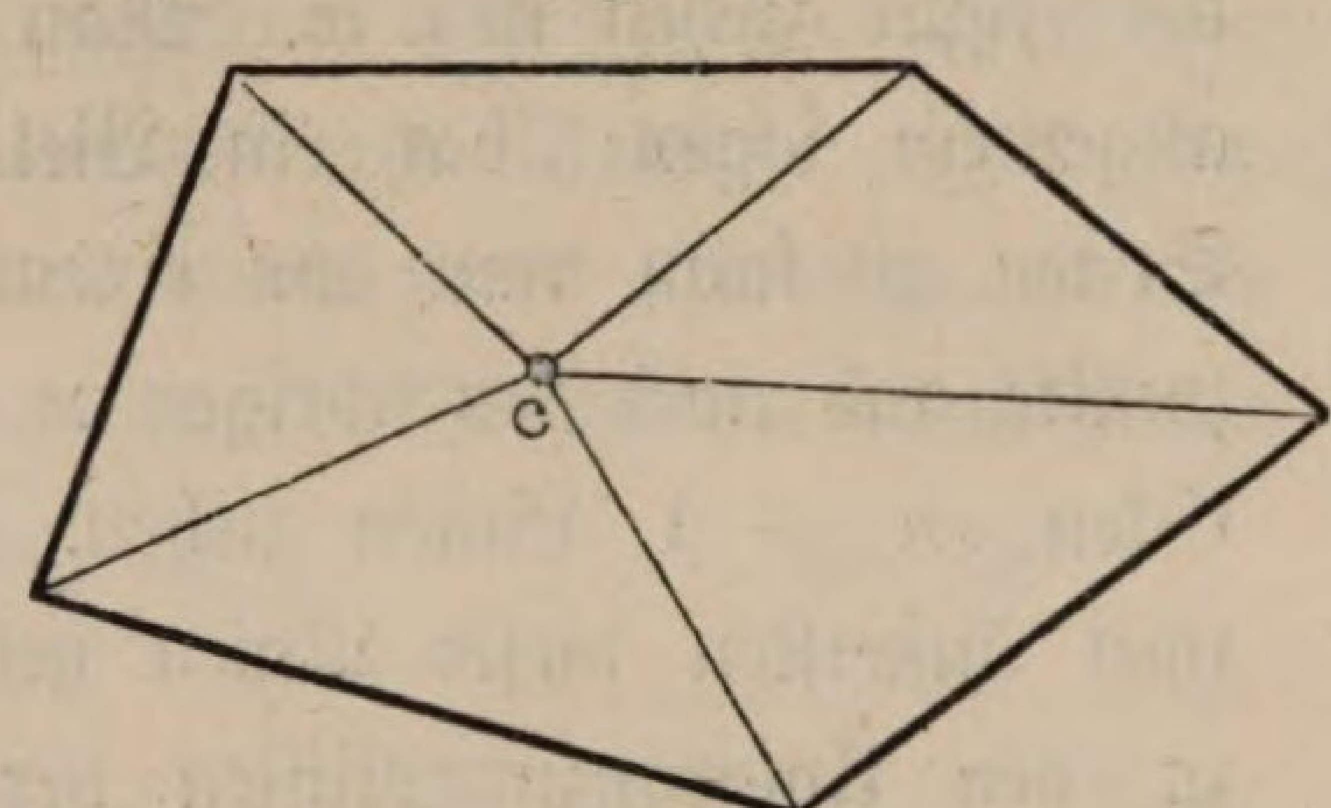
$n - 4$ Diagonalen, gezogen, so hat man von der Figur $n - 4$ Dreiecke abgeschnitten, und es bleibt nur noch ein Viereck übrig, welches durch die letzte Diagonale in zwei Dreiecke getheilt wird, so daß man in Allem $n - 4 + 2 = n - 2$ Dreiecke hat.

In wieviel Dreiecke wird durch die von einem Eckpunkte aus gezogenen Diagonalen ein Zehneck, ein Fünfzehneck, ein Zwanzig-, Dreißig-, Vierzigeck zerlegt?

27 **Eckwinkel.** Die Summe aller Eckwinkel in einem Vieleck von n Seiten ist $n . 2$ R. — 4 R., oder, was dasselbe ist, $n . 180^0 - 360^0$.

Dies zu beweisen, denke man sich von irgend einem Punkte c im Innern des Vielecks (z. B. des Fünfecks Fig. 51) Linien nach den Eckpunkten gezogen, so entstehen n (in unserm Beispiel Fig. 51 fünf) Dreiecke. Die Summe aller Winkel in allen Dreiecken beträgt $n . 2$ R. (in unserm Beispiel 5 . 2 R.). Zieht man von diesen 4 R. ab, als Summe der Winkel, welche um den Punkt c herum liegen, so bleibt für die Eckwinkel der Figur $n . 2$ R. — 4 R. (in unserm Beispiel also 5 . 2 R. — 4 R. = 6 R.).

Fig. 51.



Wie groß ist die Summe der Eckwinkel in einem Sechs-, Zehn-, Zwölfeck u. s. w.?

Ein regelmäßiges Vieleck ist ein solches, in welchem alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind.

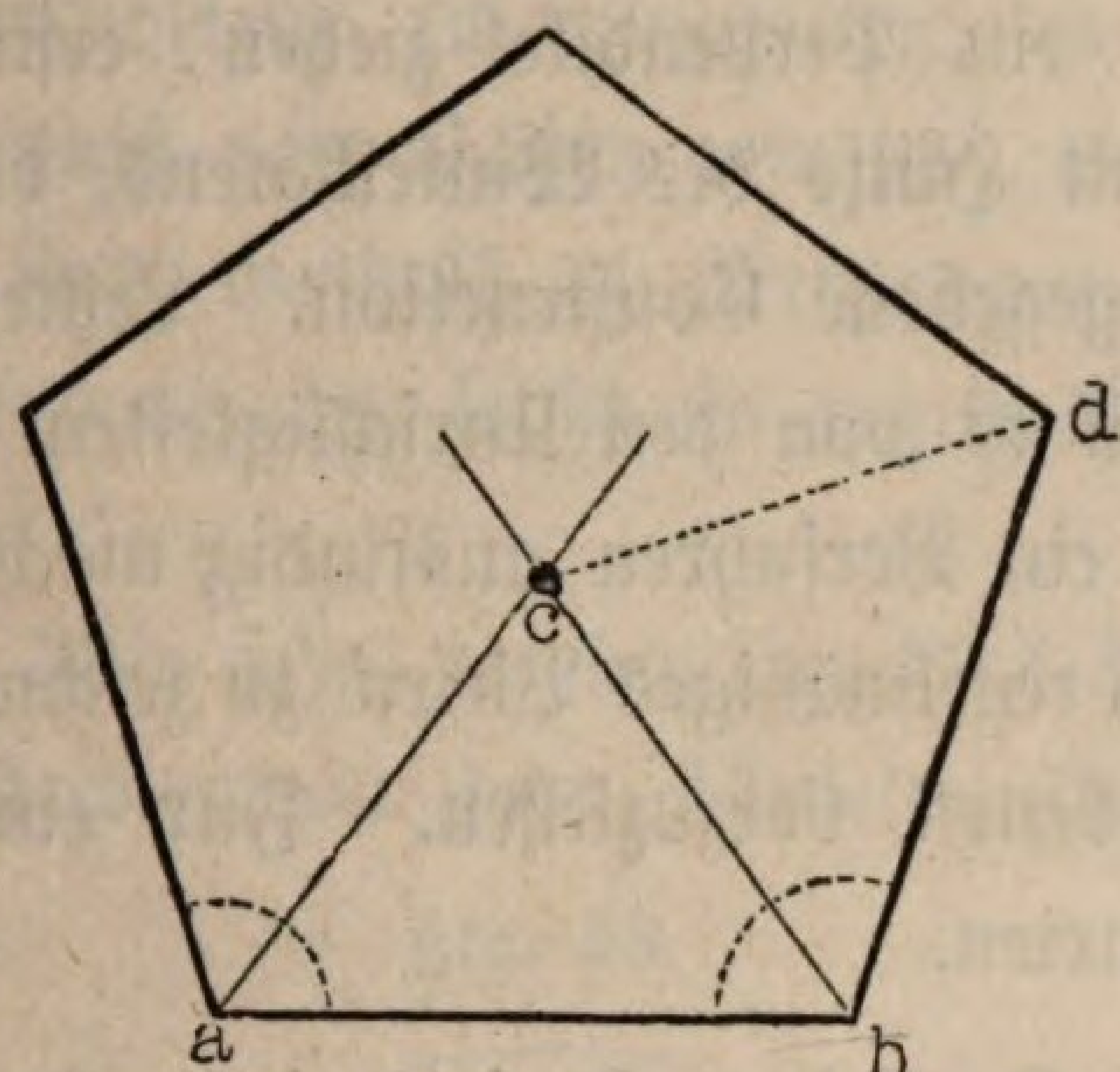
Da alle Winkel eines regelmäßigen Vielecks einander gleich sind, so ist ein jeder dieser Winkel der $n$te Theil von der Summe aller Eckwinkel, also $\frac{n . 2 \text{ R.} - 4 \text{ R.}}{n}$. Der Eckwinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist also $\frac{5 . 2 \text{ R.} - 4 \text{ R.}}{5} = {}^6/_5 \text{ R.} = 108^0$.

Wie groß ist der Eckwinkel eines regelmäßigen Sechsecks, Siebenecks u. s. w.?

Mit Hülfe der so berechneten Eckwinkel construire man ein regelmäßiges Fünfeck, Sechseck, Achteck, Zehneck, dessen Seite 35^{mm} beträgt.

Mittelpunktswinkel. Halbirt man in einem regelmäßigen Vieleck 28
zwei auf einander folgende Eckwinkel, bei b und a, Fig. 52, so schneiden sich die beiden Halbirungslinien in einem Punkte c und bilden ein gleichschenkeliges Dreieck (warum?). Zieht man von c aus nach dem zunächst bei a oder bei b liegenden Winkelpunkte, z. B. nach d, eine gerade Linie, so entsteht das Dreieck bcd, welches dem erstern gleich (warum?), also ebenfalls gleichschenkelig ist, also $cd = cb = ca$. Auf diese Weise kann man zeigen, daß alle von c aus nach den Eckpunkten gezogenen Linien einander gleich sind. Beschreibt man also um c mit dem Radius ca einen Kreis, so geht derselbe durch alle Eckpunkte des Vielecks.

Fig. 52.



Die sämmtlichen Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks liegen also auf einem Kreise, dessen Centrum der Punkt ist, in welchem sich die Halbirungslinien zweier Eckwinkel schneiden.

Zieht man von dem Mittelpunkte eines regelmäßigen Vielecks Linien nach den Eckpunkten, so müssen, wie leicht zu beweisen ist, alle dadurch gebildeten um den Mittelpunkt c liegenden Winkel einander gleich sein. Der Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist demnach $\frac{4\,\mathfrak{R}.}{5}$, eines regelmäßigen Sechsecks $\frac{4\,\mathfrak{R}.}{6}$, eines regelmäßigen n Ecks $\frac{4\,\mathfrak{R}.}{n}$.

Mit Hülfe dieses berechneten Mittelpunktswinkels kann man ebenfalls ein regelmäßiges Vieleck construiren, wenn der Radius des umschriebenen Kreises gegeben ist. Soll z. B. ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis construirt werden, dessen Radius 2″ ist, so ziehe man zuerst den Kreis, dann von seinem Mittelpunkte aus 5 Radien, deren jeder mit dem folgenden einen Winkel von $^4/_5$ R. $= 72^0$ macht, so findet man die Eckpunkte des verlangten Fünfecks.

Aufgabe. Nach dieser Methode in einen Kreis, dessen Radius 6^{cm} beträgt, ein regelmäßiges Sechseck, Achteck, Zehneck u. s. w. zu zeichnen.

Construction regelmässiger Vielecke. Bisher haben wir 29
die Vielecke immer nur mit Hülfe des Transporteurs construirt. Da aber jedes Instrument der Art mehr oder weniger ungenau ist, so ist eine mit

Hülfe des Transporteurs gemachte Zeichnung nicht so genau, als wenn man denselben hätte entbehren und nur Zirkel und Lineal hätte anwenden können. Eine ähnliche Betrachtung hätten wir schon oben anstellen können. Wir können nämlich auf dreierlei Weise ein Perpendikel ziehen, erstens mit Hülfe des Transporteurs, zweitens mit Hülfe des Winkelhakens, drittens durch die in §. 16, 17 und 18 angegebene Construction. Letzteres Verfahren ist ohnstreitig das genauste, weil es von den Unrichtigkeiten der Instrumente unabhängig ist. Könnte man ein Verfahren ausfindig machen, nur mit Hülfe des Zirkels und Lineals ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, so wäre es jedenfalls den oben angegebenen vorzuziehen. Für einige Vielecke giebt es nun solche Constructionsarten.

Wie ein regelmäßiges (gleichseitiges) Dreieck construirt wird, haben wir schon oben gesehen. Beschreibt man um das gleichseitige Dreieck einen Kreis, zieht von dem Mittelpunkte des Kreises nach den drei Eckpunkten Radien, so bilden diese drei Radien drei gleiche Winkel. Halbirt man jeden dieser drei Winkel, so steht jede Halbirungslinie senkrecht auf einer Dreiecksseite. Zieht man von einem jeden der drei Punkte, in welchen die drei Halbirungslinien den Kreis treffen, Linien nach den beiden zunächst liegenden Dreieckspunkten, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck. Halbirt man den Mittelpunktswinkel des regelmäßigen Sechsecks, so treffen die Halbirungslinien den Kreis in sechs Punkten; zieht man von jedem derselben Linien nach den beiden zunächst liegenden Sechseckspunkten, so erhält man ein regelmäßiges Zwölfeck. Auf dieselbe Weise erhält man aus dem regelmäßigen Zwölfeck ein regelmäßiges Vierundzwanzigeck u. s. w.

Nach diesen Angaben construire man, von einem gleichseitigen Dreieck ausgehend, in welchem jede Seite 3″ ist, ein regelmäßiges Sechs-, Zwölf- und Vierundzwanzigeck.

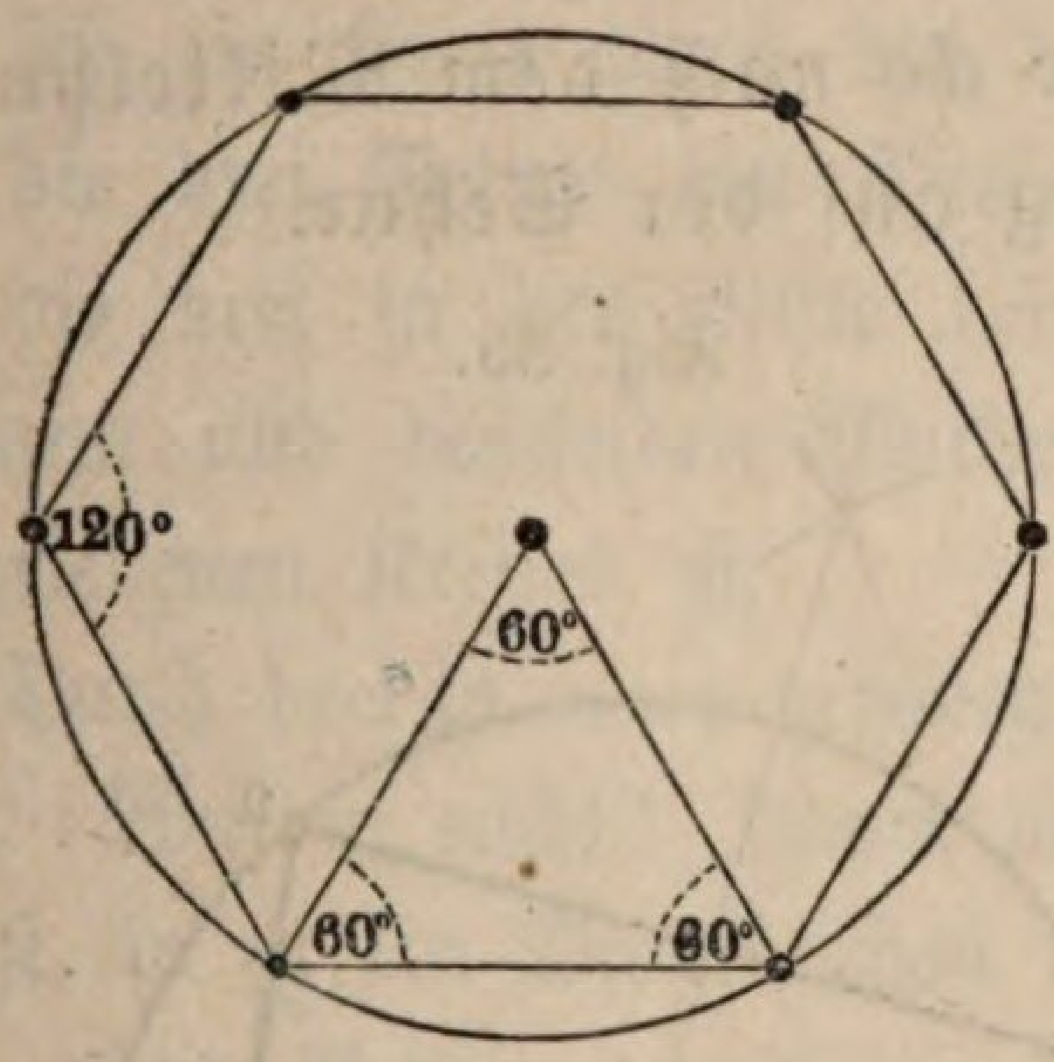
Ein regelmäßiges Viereck ist nichts anderes als ein Quadrat; wie es construirt wird, haben wir §. 22 und 23 gesehen. Die beiden Diagonalen schneiden sich im Mittelpunkte und stehen rechtwinkelig auf einander. Man kann demnach leicht in einen Kreis ein Quadrat zeichnen, wenn man nur in dem Kreise zwei Durchmesser construirt, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden. Die vier Punkte, in denen diese Durchmesser die Peripherie treffen, sind die vier Eckpunkte des Quadrats. Vom Quadrate ausgehend, kann man auf die oben angedeutete Weise ein in denselben Kreis beschriebenes Achteck, Sechszehneck u. s. w. construiren.

Man führe diese Construction aus, von einem Quadrate ausgehend, an welchem jede Seite 9cm ist.

Es giebt zwar auch ein Verfahren, ein regelmäßiges Fünfeck ohne Transporteur zu construiren, es ist aber etwas verwickelt und setzt die Kenntniß von Sätzen voraus, die bis jetzt hier noch nicht bewiesen worden sind, weshalb es übergangen werden muß. Vom Fünfeck ausgehend, kann man aber leicht ein regelmäßiges Zehn=, Zwanzig=, Vierzigeck u. s. w. construiren.

Wie jedes regelmäßige Vieleck, so wird auch das regelmäßige Sechseck durch die von dem Mittelpunkte nach den Ecken gezogenen Radien in gleichschenkelige Dreiecke zerlegt; die beiden Winkel eines jeden dieser Dreiecke, welche an der Vielecksseite liegen, sind einander gleich. Der der Sechsecksseite gegenüberliegende Mittelpunktswinkel eines solchen Theil=Dreiecks beträgt $\frac{4}{6}$ R. $= \frac{2}{3}$ R. $= 60^0$; da alle Winkel eines Dreiecks 2 R. betragen, so bleibt für die beiden an der Sechsecksseite liegenden Winkel 2 R. — $\frac{2}{3}$ R. $= \frac{4}{3}$ R., mithin ist jeder derselben gleichfalls $\frac{2}{3}$ R. oder 60^0; demnach sind alle Winkel eines solchen Dreiecks einander gleich, das Dreieck ist also gleichseitig, die Sechsecksseite also gleich dem Radius des umschriebenen Kreises.

Fig. 53.



Nach diesem Satze ist es sehr leicht, ein regelmäßiges Sechseck in einen gegebenen Kreis zu ziehen.

Fünftes Kapitel.

Vom Kreise.

30 **Sehnen.** Zu der schon oben gegebenen Definition des Kreises wollen wir hier nur noch hinzufügen, daß man ihn als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten kann. In dem Folgenden sollen nun noch die wichtigsten Beziehungen zwischen dem Kreise und einer oder mehreren geraden Linien betrachtet werden.

Lehrsatz. Zieht man von dem Halbirungspunkte *d* einer Sehne *ab*, Fig. 54, eine gerade Linie *dc* nach dem Mittelpunkte des Kreises, so steht sie rechtwinkelig auf der Sehne.

Fig. 54.

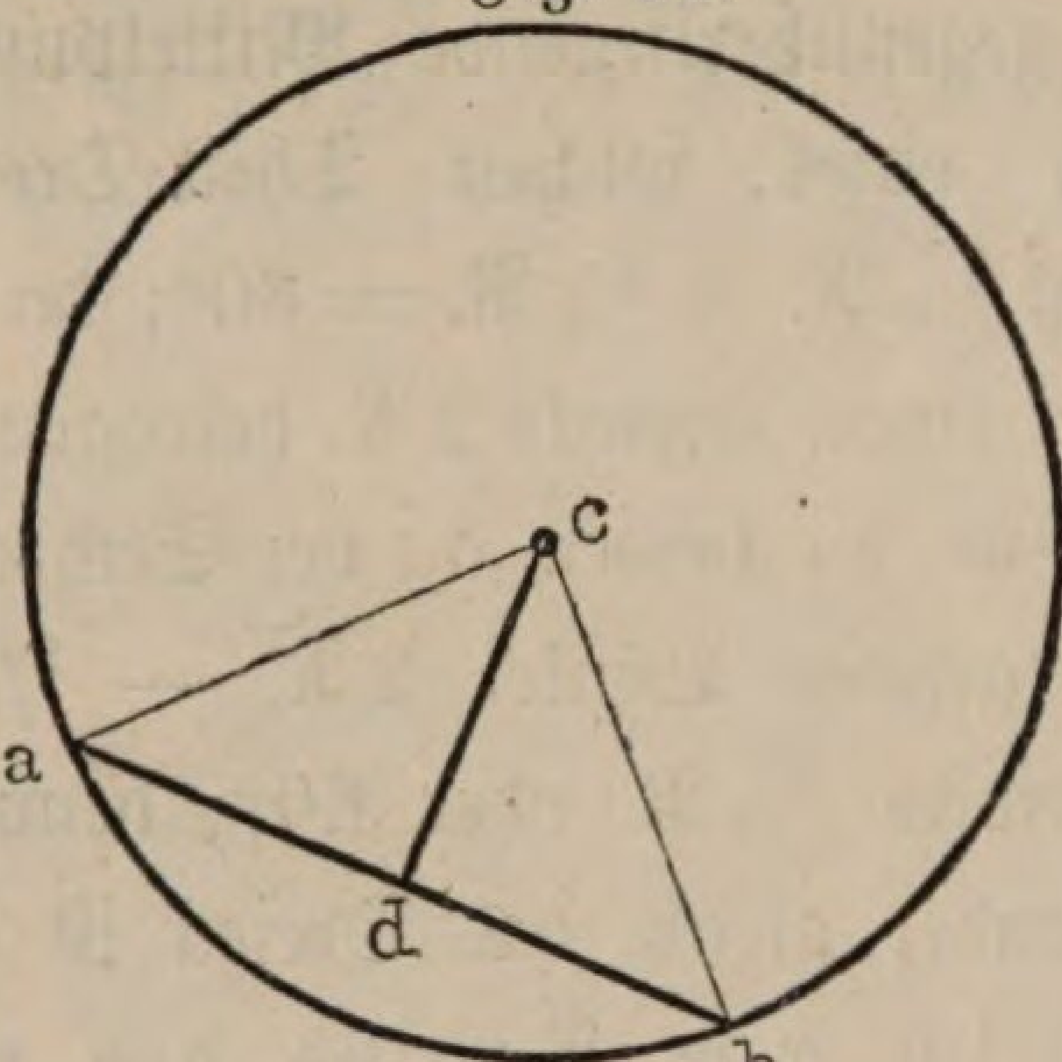
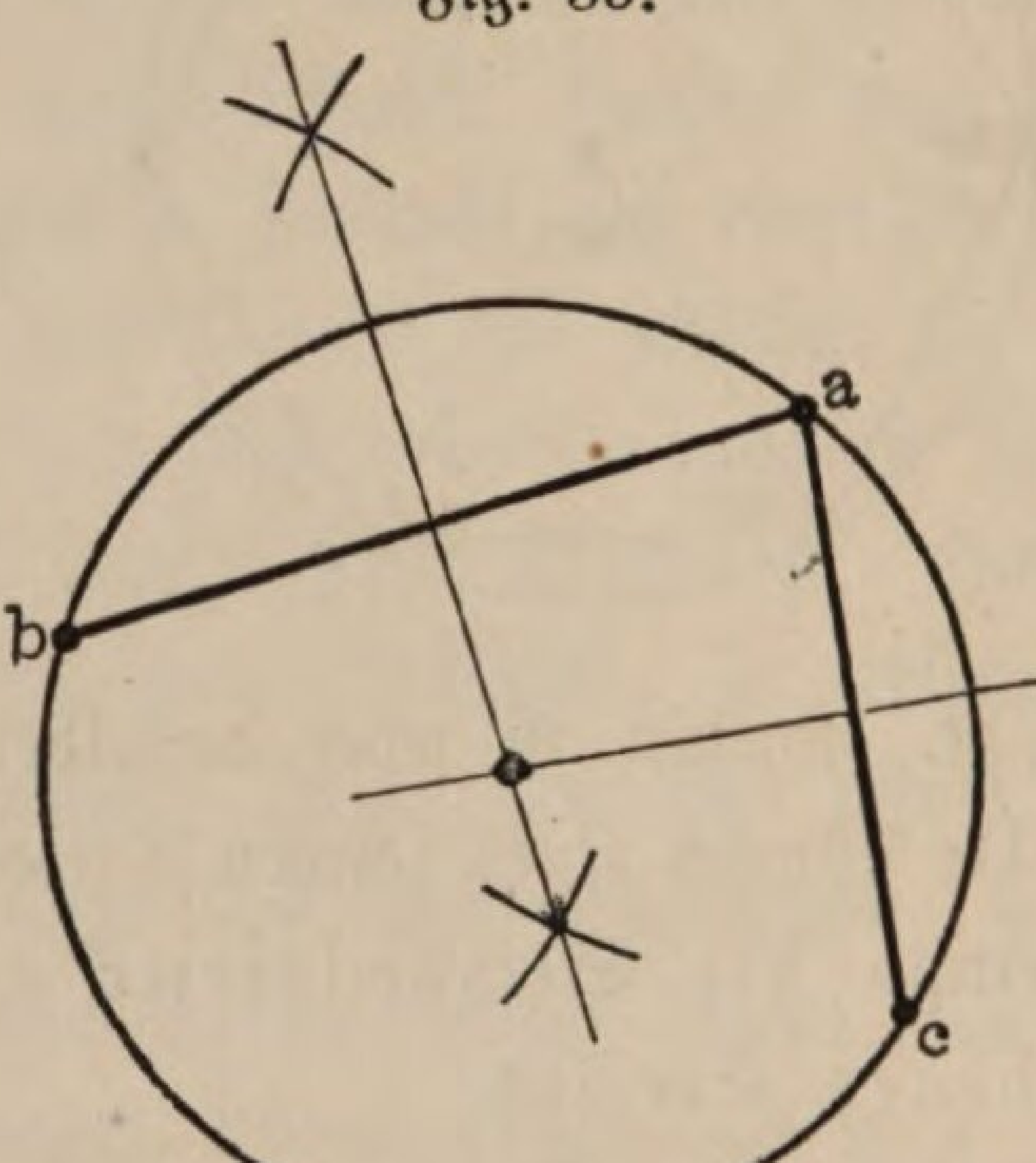


Fig. 55.



Beweis. Man ziehe die beiden Radien *ac* und *bc*, so entstehen zwei Dreiecke, deren Gleichheit leicht nachzuweisen ist, und aus der dann die Gleichheit der beiden Nebenwinkel bei *d* folgt.

Es folgt daraus auch, daß ein vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefälltes Perpendikel dieselbe halbirt, und daß ein in dem Halbirungspunkte der Sehne errichtetes Perpendikel durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

Auf dem zuletzt ausgesprochenen Satze beruht ein Verfahren, den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden. Man hat nur zwei beliebige Sehnen im Kreise zu ziehen und diese nach §. 19 zu halbiren; der Punkt, in welchem sich die Halbirungslinien schneiden, ist der gesuchte Mittelpunkt.

Aufgabe. Durch drei beliebig gegebene Punkte *a*, *b* und *c* (Fig. 55) einen Kreis zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von einem der gegebenen Punkte, z. B. von *a*, Linien nach den beiden anderen, so werden die beiden Linien *ab* und *ac* Sehnen des Kreises sein müssen; halbirt man also nach §. 19 die beiden Linien *ab* und *ac*, so ist der Punkt, in welchem sich die beiden Halbirungsperpendikel schneiden, der gesuchte Mittelpunkt. Auf diese Weise kann man durch die Eckpunkte eines jeden beliebigen Dreiecks einen Kreis ziehen.

Zur Uebung ziehe man einen Kreis durch die Eckpunkte mehrerer der oben construirten Dreiecke.

Ist ein Kreis durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks gezogen, so sind die drei Seiten des Dreiecks Sehnen des Kreises; folglich müssen auch die drei in der Mitte der Dreiecksseiten errichteten Perpendikel sich in einem und demselben Punkte schneiden, welcher der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist.

Durch drei in einer geraden Linie liegende Punkte läßt sich kein Kreis legen. Warum nicht? Wenn der Radius des umschriebenen Kreises gegeben ist, so ist ein Dreieck schon bestimmt, wenn man außerdem nur noch zwei andere Bestimmungsstücke desselben kennt, z. B. zwei Seiten, oder eine Seite und einen an derselben anliegenden Winkel, oder die Grundlinie und die Höhe u. s. w. Zur Uebung construire man folgende Aufgaben:

	R	*a*	*b*		*R*	*a*	*C*
1.	2″	2″	1″	4.	60mm	60mm	60⁰
2.	1″5‴	4″	2″3‴	5.	60mm	90mm	170⁰
3.	1″	2″	1″4‴	6.	30mm	36mm	118⁰

	R	*a*	*h*
7.	2″	2″	2″
8.	1″5‴	2″	1″7‴
9.	1″	1″4‴	1″8‴

R bezeichnet hier den Radius des umschriebenen Kreises, *h* die Höhe des Dreiecks; die anderen Buchstaben haben die schon früher angegebene Bedeutung. Eine der drei ersten Aufgaben ist unmöglich, eine läßt zwei Auflösungen zu. Warum? Eben so ist eine der drei folgenden Aufgaben und eine der drei letzten unmöglich.

31 **Centri- und Peripheriewinkel.** Zieht man von dem Mittelpunkte c eines Kreises zwei Radien ca und cb (die Figur kann sich Jeder selbst entwerfen), so bilden dieselben einen Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt ist, und dessen Schenkel den Bogen ab einschließen. Man nennt einen solchen Winkel einen Centriwinkel, welcher auf dem Bogen ab steht. Zieht man von irgend einem Punkte d der Peripherie (der aber nicht auf dem Bogen ab selbst liegt) zwei Linien nach a und b, so bilden sie einen Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel denselben Bogen ab einschließen. Ein solcher Winkel heißt Peripheriewinkel.

In Beziehung auf die Lage der Peripheriewinkel kann man drei Fälle unterscheiden. Der Mittelpunkt des Kreises liegt entweder 1. auf dem einen Schenkel des Peripheriewinkels, 2. er liegt innerhalb, oder 3. er liegt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels.

Ein Peripheriewinkel ist immer halb so groß als der Centriwinkel, der mit ihm auf einem Bogen steht.

Der Beweis dieses Satzes muß für jeden der drei Fälle besonders geführt werden.

1. Der Peripheriewinkel y und der Centriwinkel x (Fig. 56) stehen auf demselben Bogen. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf dem einen

Fig. 56.

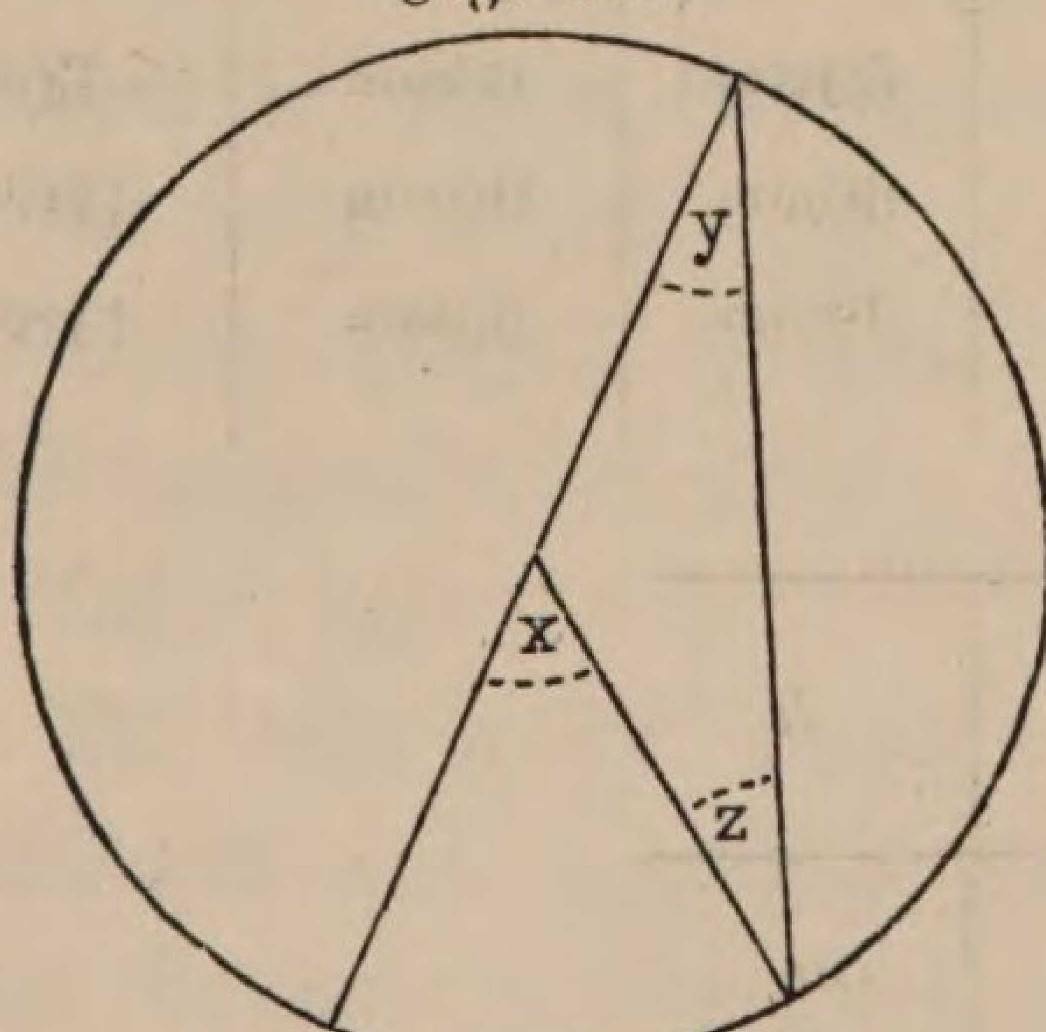
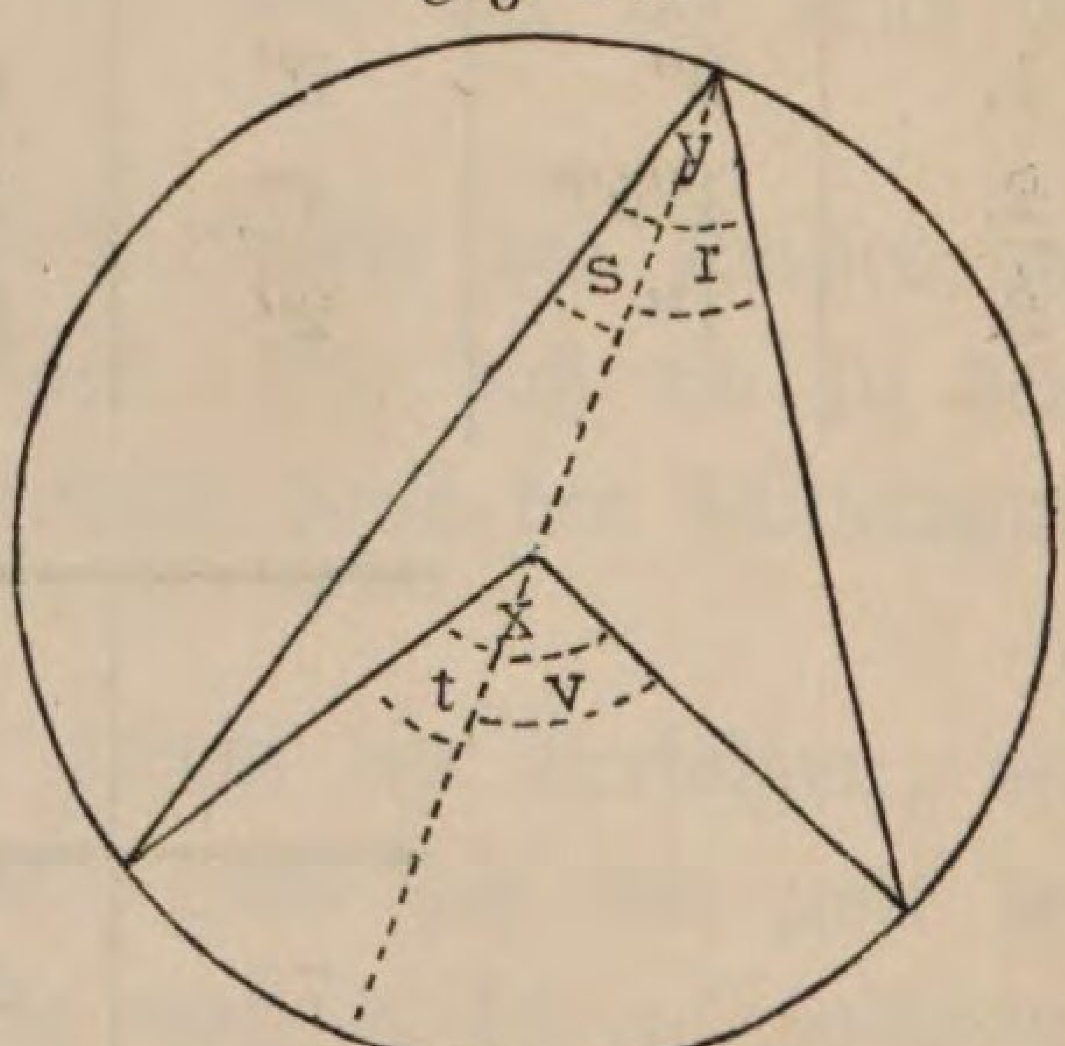


Fig. 57.



Schenkel des Peripheriewinkels. Nach §. 9 ist $x = y + z$; nach §. 11 aber ist $z = y$, also $x = 2y$.

2. Der Peripheriewinkel y (Fig. 57) und der Centriwinkel x stehen auf demselben Bogen; der Mittelpunkt des Kreises liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels. Man ziehe von der Spitze des Peripheriewinkels eine gerade Linie durch den Mittelpunkt, so wird durch dieselbe y in zwei Theile r und s, x aber in die zwei Theile v und t getheilt. Nach dem eben gelieferten Beweise aber ist $t = 2s$, $v = 2r$, folglich $t + v = 2s + 2r = 2(s + r)$ oder $x = 2y$.

3. Der Centriwinkel x (Fig. 58) und der Peripheriewinkel y stehen auf demselben Bogen, der Mittelpunkt des Kreises aber liegt außerhalb der Schenkel des letztern. Man ziehe eine gerade Linie von der Spitze des Winkels y über den Mittelpunkt. Nach dem obigen Beweise ist $v = 2t$, $r = 2s$, folglich $v - r = 2t - 2s = 2(t - s)$ und daraus endlich $x = 2y$.

Da nun die Wahrheit dieses Satzes für alle drei Fälle bewiesen ist, so kann man leicht folgern, daß alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, einander gleich sind.

Fig. 58.

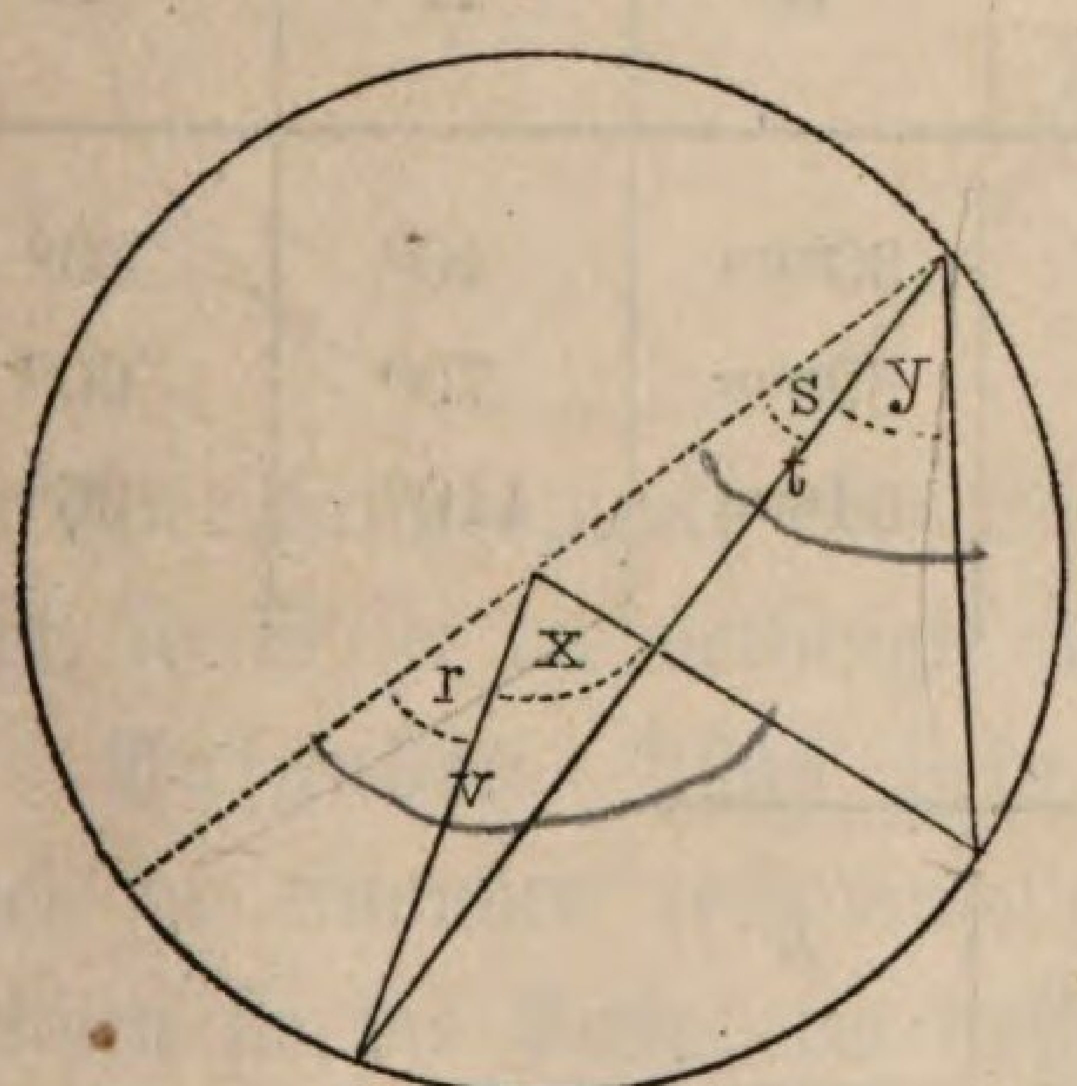
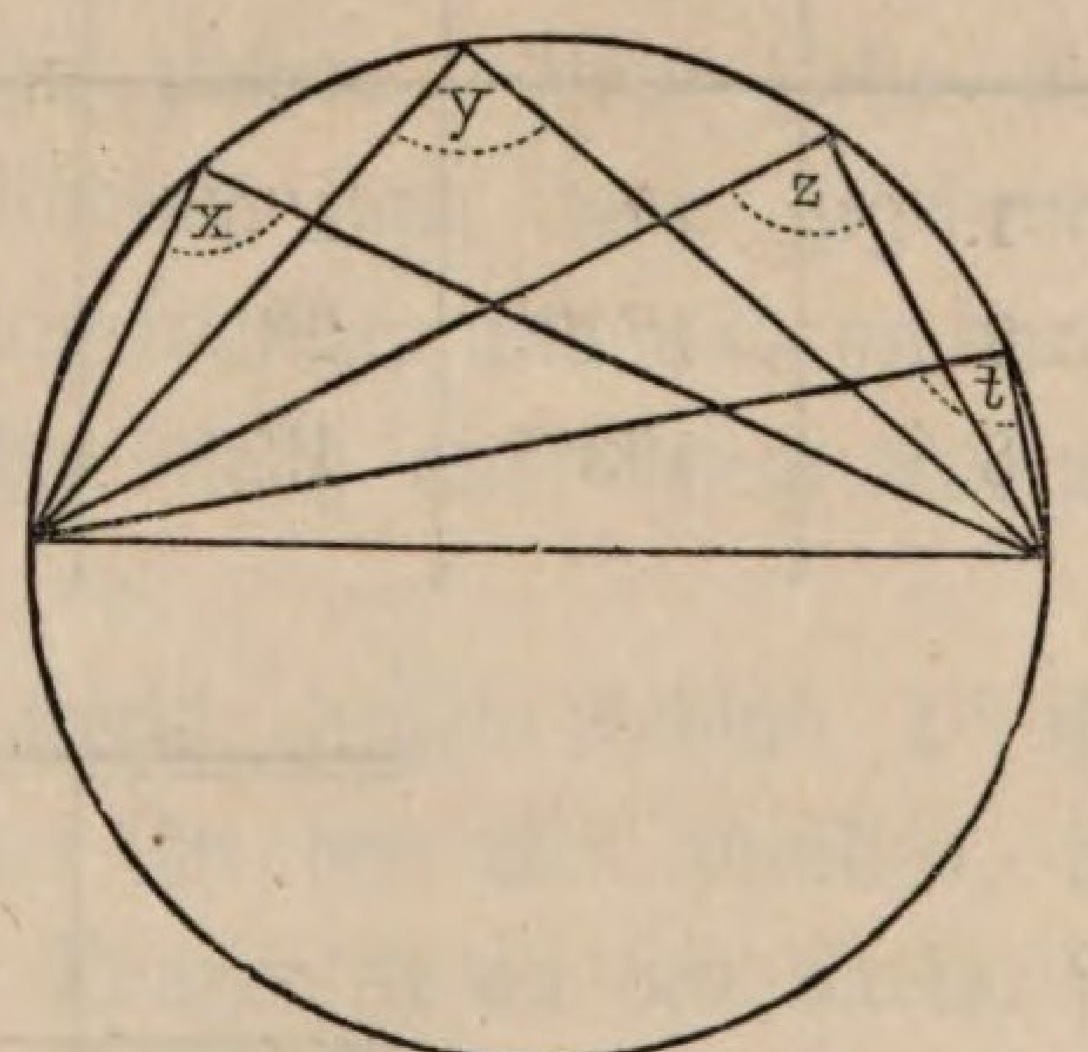


Fig. 59.



Wenn ein Peripheriewinkel ein spitzer Winkel ist, so ist der Bogen, auf dem er steht, jedenfalls kleiner als ein Halbkreis.

Der Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreise steht, ist ein rechter, oder mit anderen Worten, zieht man von irgend einem Punkte der Peripherie Linien nach den beiden Endpunkten eines Durchmessers, so bilden dieselben einen rechten Winkel.

So ist also jeder der vier Winkel x, y, z und t in Fig. 59 ein rechter.

Der Bogen, auf dem ein stumpfer Peripheriewinkel steht, ist größer als ein Halbkreis.

Ist der Radius des Kreises und die Größe des Peripheriewinkels

bestimmt, so ist auch die Sehne des Bogens bestimmt, auf welchem der Peripheriewinkel steht.

Man zeichne in einem Kreise, dessen Radius 1″ ist, einen Peripheriewinkel von 18⁰, 43⁰, 73⁰, 98⁰, 124⁰, 160⁰. Wie groß sind die Sehnen der Bogen, auf welchen diese Peripheriewinkel stehen?

Die erwähnte Sehne *a* bildet mit den beiden Schenkeln des Peripheriewinkels ein Dreieck, welches aber durch den Radius des Kreises *R*, die Sehne *a* und den Peripheriewinkel *A* noch nicht völlig bestimmt ist, weil, wenn die Sehne *a* gezogen ist, die Lage des dritten Eckpunktes noch beliebig auf der Peripherie genommen werden kann. Die drei Bestimmungsstücke *R*, *a* und *A* sind auch eigentlich nur als zwei zu betrachten, weil *a* durch *A* und umgekehrt *A* durch *a* bestimmt ist. Ist *A* gegeben, so ist *a* nicht mehr willkürlich.

Nach diesen Bemerkungen wird es wohl leicht sein, folgende Dreiecke zu construiren.

	R	*b*	*A*		*R*	*A*	*B*
1.	1″	1″5‴	40⁰	4.	30mm	40⁰	80⁰
2.	1″2‴	2″	120⁰	5.	39mm	70⁰	60⁰
3.	1″3‴	1″	113⁰	6.	54mm	110⁰	36⁰

	R	*A*	*h*
7.	1″	60⁰	1″8‴
8.	1″4‴	75⁰	1″2‴
9.	2″	117⁰	1″

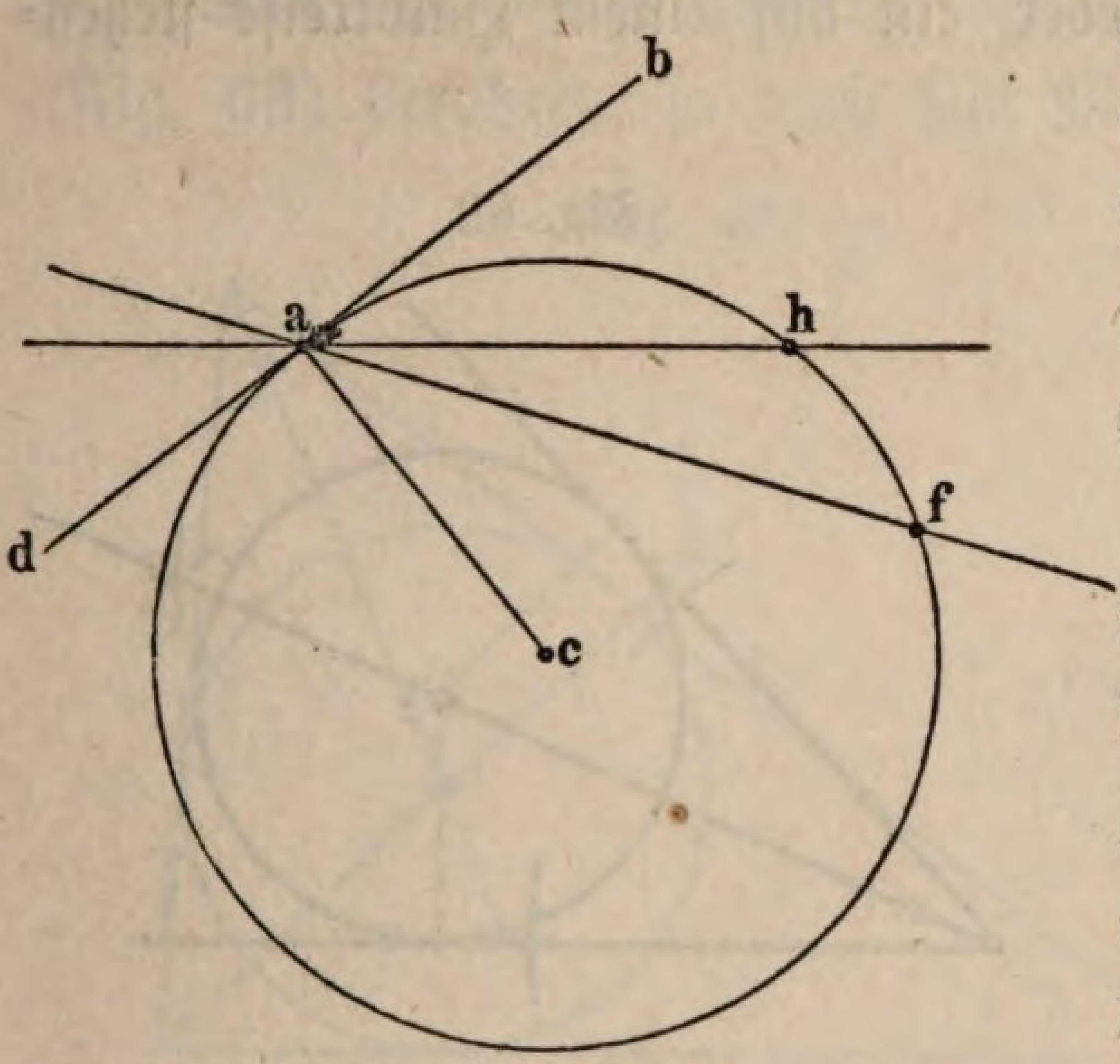
Die Auflösung einiger dieser Aufgaben ist unmöglich. Welche sind es? Warum ist die Lösung unmöglich?

32 **Die Tangente.** Wenn eine gerade Linie einen Kreis in zwei Punkten, etwa in *a* und *f*, Fig. 60, schneidet, so fällt nothwendig ein Stück derselben in den Kreis. Wenn sich nun der eine der beiden Durchschnittspunkte mehr und mehr dem andern unverrückt bleibenden Durch-

schnittspunkte *a* nähert, wenn z. B. *f* nach *h* und noch weiter gegen *a* vorrückt, so wird das in den Kreis fallende Stück der schneidenden Linie immer kleiner; fallen endlich die beiden Durchschnittspunkte in einen, also in *a*, zusammen, so hat die gerade Linie nur noch einen Punkt mit dem Kreise gemein, sie berührt den Kreis nur in einem Punkte und heißt deshalb Tangente oder Berührende. Kein Punkt der Tangente liegt innerhalb des Kreises.

Unter allen Punkten der Tangente *db* (Fig. 60) liegt der Berührungspunkt *a* dem Mittelpunkte des Kreises am nächsten. Ein vom Mittelpunkte zum Berührungspunkte *a* gezogener Radius ist also die kürzeste Entfernung des Mittelpunkts von der Tangente, dieser Radius steht also rechtwinkelig auf der Tangente (§. 13).

Fig. 60.



Daraus ergiebt sich ein leichtes Verfahren, in irgend einem Punkte der Peripherie eine Tangente an den Kreis zu ziehen. Man ziehe nur einen Radius nach dem gegebenen Berührungspunkte, und alsdann durch den Berührungspunkt eine Linie, welche rechtwinkelig auf diesem Radius steht, so ist sie die verlangte Tangente.

Aufgaben. Man ziehe durch einen Kreis, dessen Radius 1″ ist, zwei zu einander rechtwinkelige Durchmesser. In den vier Punkten, in welchen sie die Peripherie treffen, ziehe man Tangenten an den Kreis, so werden diese vier Tangenten ein um den Kreis beschriebenes Quadrat bilden.

Man ziehe vom Mittelpunkte des Kreises aus fünf Radien, deren jeder mit dem folgenden einen Winkel = $^4/_5$ R. macht. Zieht man in den fünf Punkten, in welchen diese Radien den Kreis treffen, Tangenten an denselben, so bilden diese fünf Tangenten ein regelmäßiges um den Kreis beschriebenes Fünfeck.

Auf dieselbe Weise construire man ein regelmäßiges um den Kreis beschriebenes Sechseck, Achteck, Zehneck u. s. w.

Aufgabe. Durch einen Punkt *a*, Fig. 61 (a. f. S.), außerhalb des um *c* beschriebenen Kreises eine Tangente an diesen Kreis zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von dem gegebenen Punkte *a* (Fig. 61) eine gerade Linie nach dem Mittelpunkte *c* des gegebenen Kreises, halbire diese Linie und beschreibe um den Halbirungspunkt *b* einen Kreis mit dem Radius *bc*. Wo dieser Kreis den gegebenen schneidet, ist der Berührungspunkt. Der um *b* gezogene Kreis schneidet aber den gegebenen in zwei Punkten *d* und *f*. Man kann also von *a* aus zwei Tangenten an den Kreis ziehen, die eine berührt ihn in *d*, die andere in *f*.

Um zu beweisen, daß *ad* und *af* wirklich Tangenten sind, hat man nur zu zeigen, daß *ad* mit dem Radius *cd*, und *af* mit dem Radius *cf* einen rechten Winkel macht. Der Winkel *cda* aber sowohl wie der Winkel *cfa* sind aber rechte, weil jeder ein auf einem Halbkreise stehender Peripheriewinkel ist.

Fig. 61.

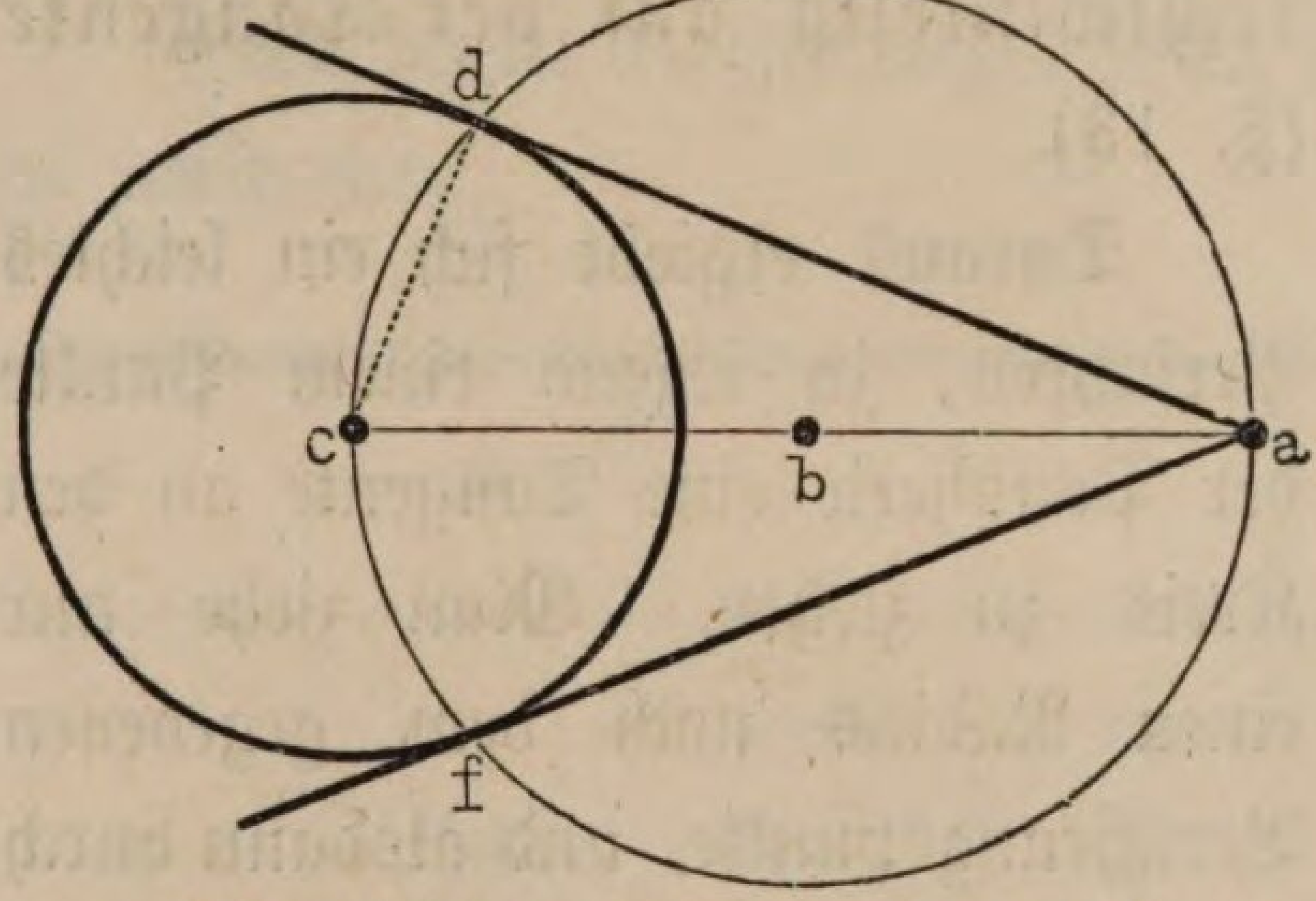
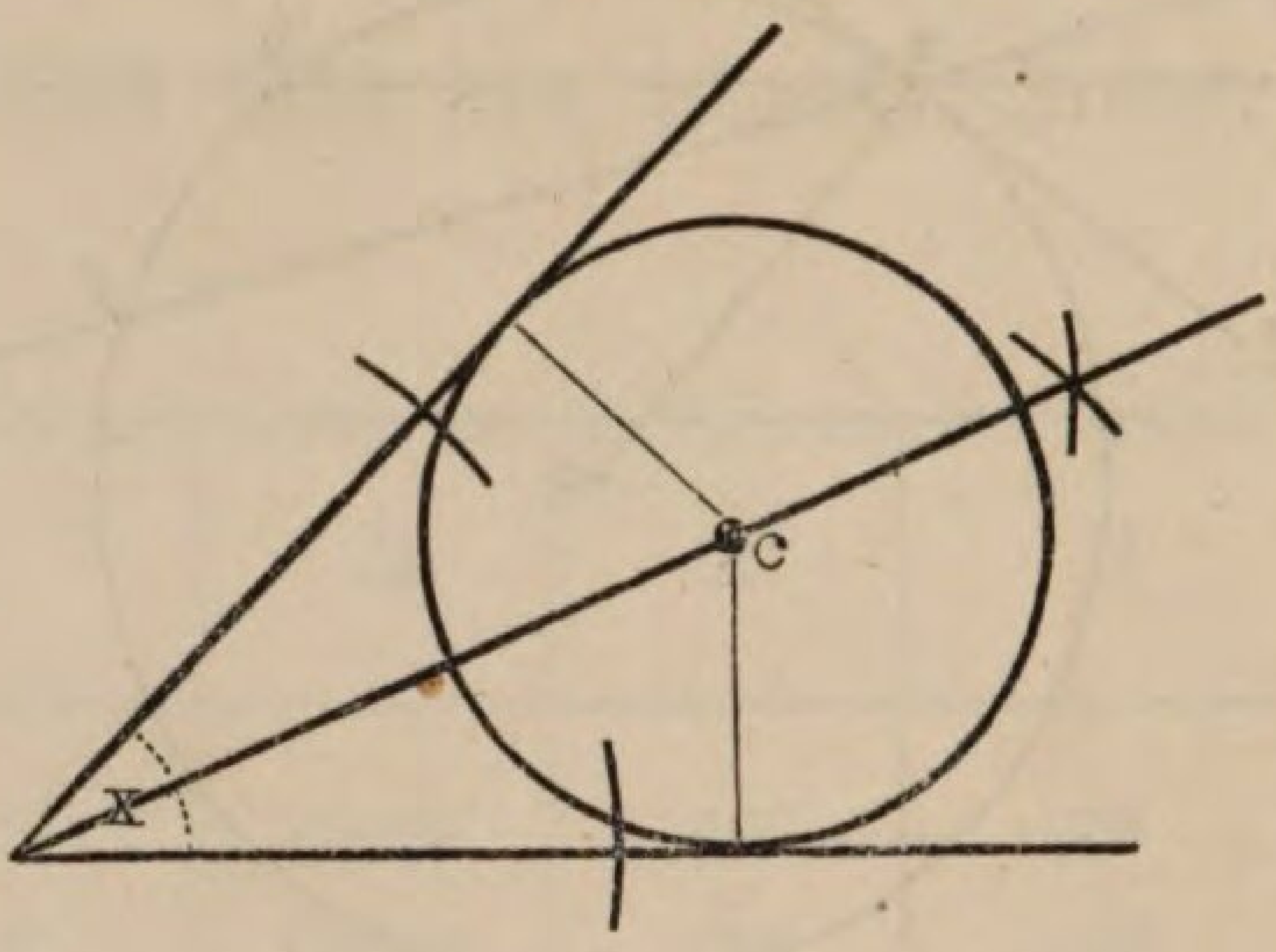


Fig. 62.



Die beiden Tangenten machen einen Winkel mit einander, der um so spitzer wird, je weiter sich der Punkt *a* von dem Kreise entfernt. Dieser Winkel wird durch die Linie *ac* halbirt. Man kann daraus schließen, daß der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels berühren soll, auf der Halbirungslinie dieses Winkels liegen muß. Um also einen Kreis zu ziehen, welcher die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels *x* (Fig. 62) zugleich berührt, hat man nur den Winkel zu halbiren. Jeder Punkt der Halbirungslinie kann zum Mittelpunkte eines Kreises genommen werden, welcher die verlangte Eigenschaft hat. Hat man irgend einen Punkt *c* der Halbirungslinie zum Mittelpunkte gewählt, so ist das von diesem Punkte auf den einen Schenkel des Winkels gefällte Perpendikel der Radius des verlangten Kreises.

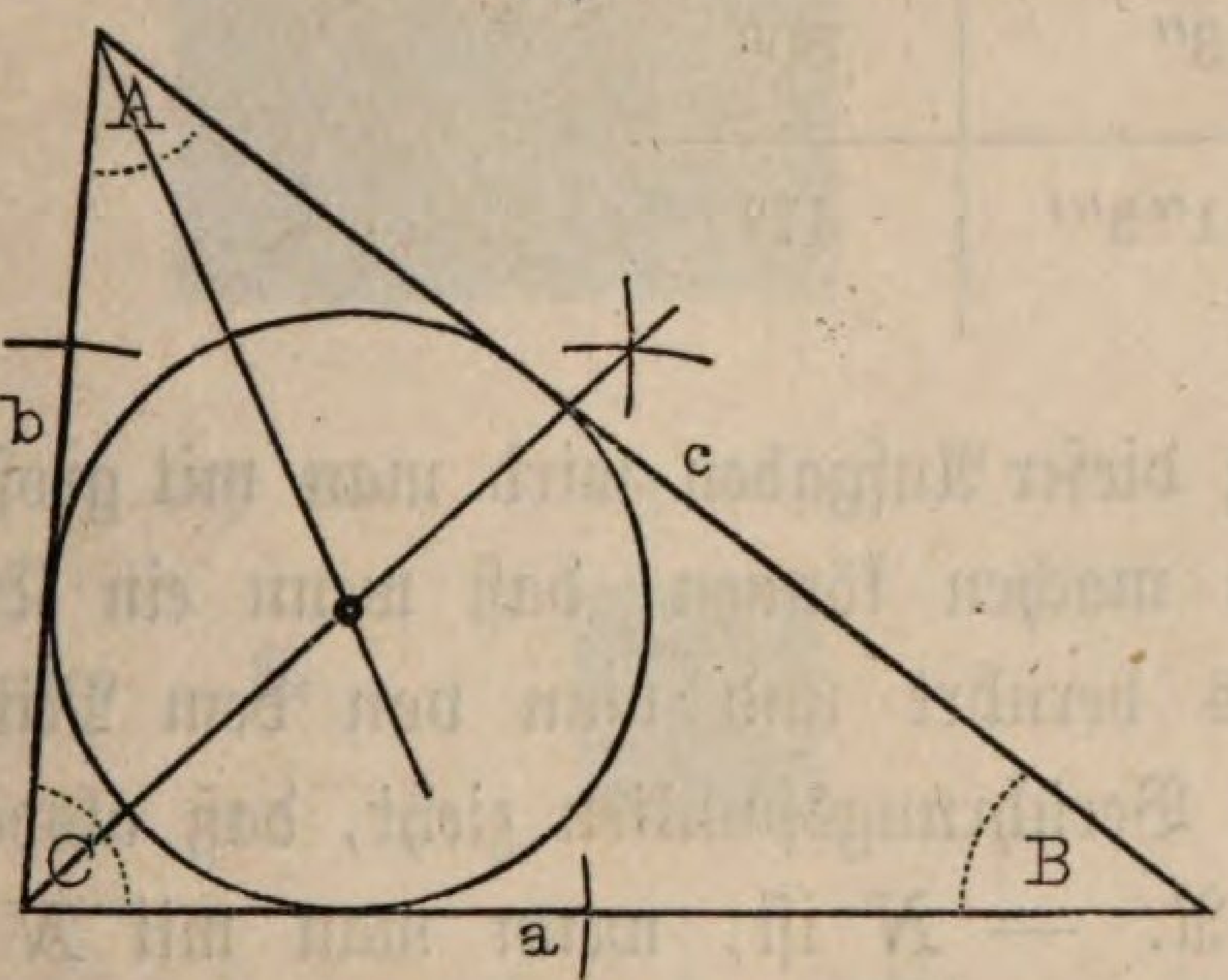
Die Perpendikel, welche man von irgend einem Punkte der Halbirungslinie auf die beiden Schenkel des gegebenen Winkels fällen kann, sind natürlich gleich, und machen einen Winkel mit einander, welcher den gegebenen Winkel zu 2 R. ergänzt.

Wenn der Radius des Kreises gegeben ist, welcher die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels berühren soll, so kann der Mittelpunkt nicht mehr willkürlich auf der Halbirungslinie genommen werden, er liegt auf dem Durchschnitt der Halbirungslinie mit einer andern geraden Linie, die man mit dem einen Schenkel des Winkels parallel gezogen hat, und deren Entfernung von diesem Schenkel dem gegebenen Radius gleich ist.

Beispiele. Einen Kreis zu ziehen, dessen Radius 1″ ist, und welcher die beiden Schenkel eines Winkels von 119° berührt; einen andern Kreis zu ziehen, dessen Radius 42mm ist, und welcher die beiden Schenkel eines Winkels von 63° berührt.

Soll ein Kreis zugleich die beiden Seiten *a* und *b* eines Dreiecks (Fig. 63) berühren, so muß sein Mittelpunkt auf der Halbirungslinie des Winkels *C* liegen; der Mittelpunkt eines Kreises aber, der zugleich die beiden Seiten *b* und *c* berührt, liegt auf der Halbirungslinie des Winkels *A*. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Halbirungslinien ist daher der Mittelpunkt eines Kreises, der zu gleicher Zeit die drei Seiten des Dreiecks berührt. Sein Radius ist das von dem Mittelpunkte auf eine Dreiecksseite gefällte Perpendikel. Auf diese Weise läßt sich in jedes Dreieck ein Kreis beschreiben, welcher die drei Seiten berührt.

Fig. 63.



Da dieser Kreis die beiden Seiten *a* und *c* berührt, so muß also auch sein Mittelpunkt auf der Halbirungslinie des Winkels *B* liegen, woraus folgt, daß sich die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks in einem Punkte schneiden.

Zur Uebung ziehe man in mehrere der oben construirten Dreiecke Kreise, welche die drei Seiten berühren.

Der Radius *r* des inbeschriebenen Kreises kann eines der nöthigen Bestimmungsstücke eines Dreiecks ersetzen, wie durch die Ausführung der folgenden Beispiele klar werden wird.

Man construire folgende Dreiecke, für welche ist:

r	*a*	*C*	*r*	*B*	*C*
1″	2″	60⁰	30mm	60⁰	70⁰
1″	2″3‴	112⁰	36mm	40⁰	60⁰
8‴	2″	97⁰	21mm	110⁰	30⁰

r	*h*	*C*
1″	2″	112⁰
1″1‴	3″	80⁰
9‴	1″5‴	47⁰

Anmerkung. Bei Auflösung dieser Aufgaben wird man mit großem Vortheil von dem Satze Gebrauch machen können, daß wenn ein Kreis die beiden Schenkel eines Winkels berührt und man von dem Mittelpunkte des Kreises Radien zu den Berührungspunkten zieht, daß alsdann der Winkel der beiden Radien 2 R. — *N* ist, wenn man mit *N* die Gradzahl des gegebenen Winkels bezeichnet. Beträgt z. B. der gegebene Winkel 60⁰, so ist der Winkel dieser beiden Radien 180⁰ — 60⁰ = 120⁰. [Vergleiche S. 46 unten.]

Sechstes Kapitel.

Berechnung des Flächeninhalts geradliniger ebener Figuren.

---

33 **Flächenmaasse.** Den Flächeninhalt einer ebenen Figur zu bestimmen, heißt sehen, wie oft eine Fläche von bekannter Größe in derselben enthalten ist. Diese Fläche von bekannter Größe ist die Einheit des Flächenmaaßes. Man nimmt allgemein ein Quadrat, dessen

Seite der Längeneinheit gleich ist, als Einheit des Flächenmaaßes an. Da man verschiedene Längeneinheiten hat, so hat man auch verschiedene Flächeneinheiten, als: Quadratmeile, Quadratfuß, Quadratzoll, Quadratlinie, Quadratmeter u. s. w., welche nichts anderes als Quadrate sind, deren Seite eine Meile, ein Fuß, ein Zoll, eine Linie, ein Meter u. s. w. ist.

Fig. 64 ist ein Quadratzoll (1 □″), Fig. 65 ist eine Quadratlinie (1 □‴) altfranzösisches Maaß; Fig. 66 ist ein Quadratcentimeter (1 □^{cm}).

Fig. 64.



Fig. 67.

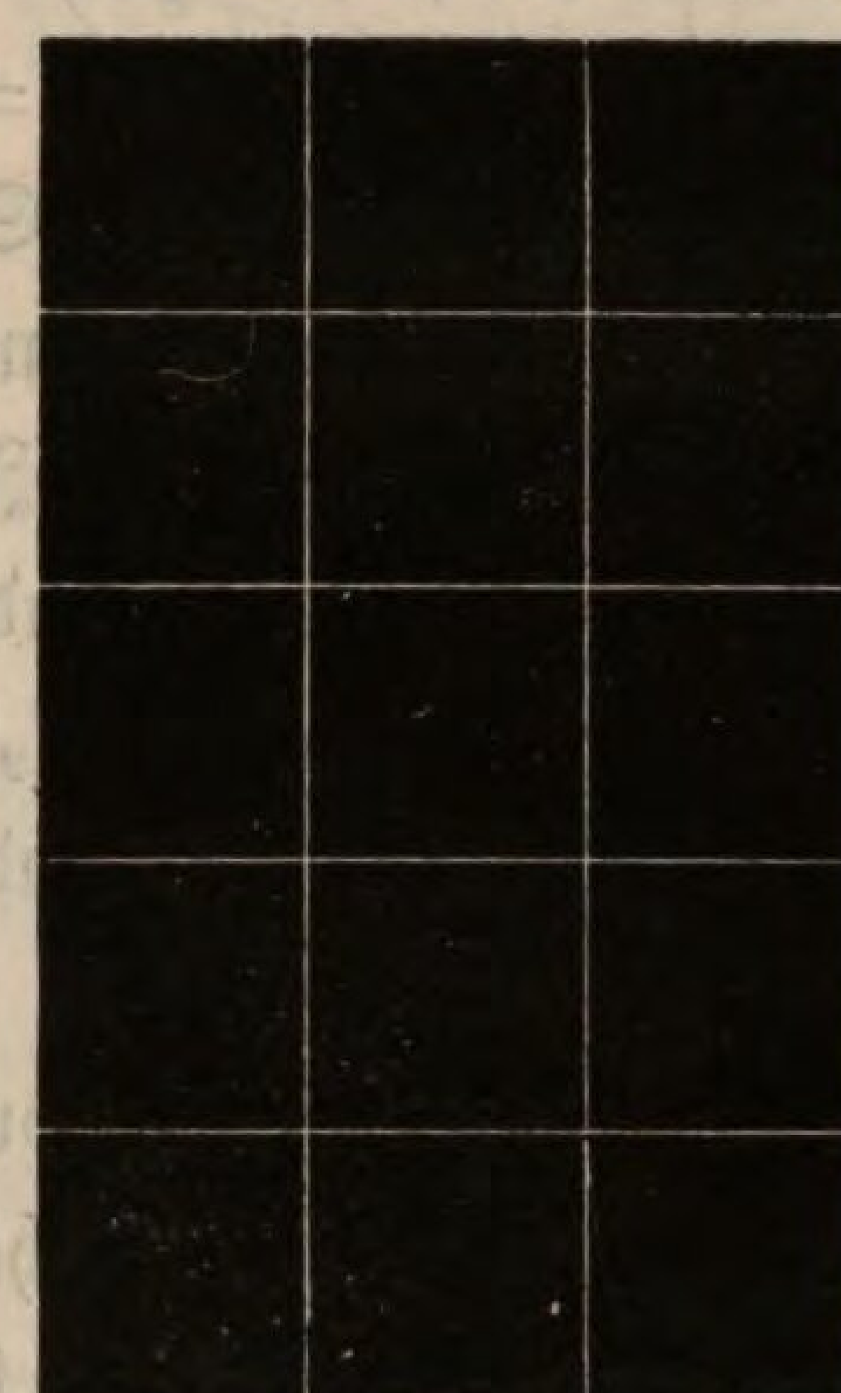


Fig. 65.



Fig. 66.



Nichts ist nach dieser Erklärung leichter, als den Inhalt eines länglichen Rechtecks zu finden, wenn die Grundlinie und die Höhe, durch die Längeneinheit gemessen, sich gerade in ganzen Zahlen ausdrücken läßt. Es sei z. B. die Grundlinie eines länglichen Rechtecks (Fig. 67) gleich 3 Centimetern, die Höhe 5^{cm}, so ist klar, daß man auf der Grundlinie drei Quadrate nebeneinander stellen kann, deren jedes ein Centimeter breit und ein Centimeter hoch ist. Solcher Reihen von drei Quadratcentimetern muß man aber fünf auf einander setzen, bis man das ganze längliche Rechteck mit Quadratcentimetern ausgefüllt hat; das längliche Rechteck, Fig. 67, enthält also 3×5 oder 15 Quadratcentimeter. Wäre die Grundlinie 4, die Höhe 9 Zoll, so wäre der Inhalt $4 \times 9 = 36$ Quadratzoll. Man findet also den Inhalt eines länglichen Rechtecks, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

Wenden wir dies auf die Inhaltsberechnung von Quadraten an, so finden wir, in welchem Verhältniß die verschiedenen Flächenmaaßeinheiten eines Maaßsystems stehen. Ist die Seite eines Quadrats

2 3 4 5 6 10,

so ist der Inhalt des Quadrats

4 9 16 25 36 . . . . . 100.

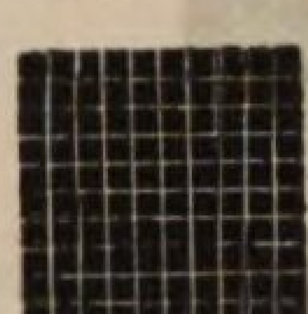
Der Inhalt der Quadrate nimmt also nicht in demselben Verhältnisse zu, wie die Seiten, sondern im Verhältniß der zweiten Potenzen der Seitenlängen.

Dasselbe gilt auch für längliche Rechtecke. Der Inhalt eines länglichen Rechtecks, dessen Grundlinie a, dessen Höhe b ist, ist $a \times b$. Wäre die Grundlinie $2a$, die Höhe $2b$, also doppelt so groß als vorher, so wäre der Inhalt $2a \times 2b = 4ab$, also viermal so groß als der frühere Inhalt. Werden die Seiten eines länglichen Rechtecks 6mal so groß, so wird sein Inhalt 36mal so groß, als er war; werden die Seiten 10mal so groß, so wird der Inhalt das Hundertfache u. s. w.

Ist die Seite eines Quadrats $^1/_2{}''$, so ist sein Inhalt $^1/_4 \square''$, d. h. vier Quadrate, deren Seite $^1/_2{}''$ ist, machen einen Quadratzoll aus. Eben so: wenn die Seite eines Quadrats $^1/_{10}{}''$ ist, so ist sein Inhalt $^1/_{10} \times {}^1/_{10} = {}^1/_{100} \square''$.

Jede Seite eines Quadratcentimeters (Fig. 68) ist 10 Millimeter lang, der Inhalt dieses Quadrates also 10×10 oder 100 □Millimeter; ebenso kann man sich leicht überzeugen, daß ein Quadratdecimeter 100 Quadratcentimeter enthält u. s. w.

Fig. 68.



$$1 \square^{\text{cm}} = 100 \square^{\text{mm}}$$
$$1 \square^{\text{dm}} = 100 \square^{\text{cm}} = 10000 \square^{\text{mm}}$$
$$1 \square^{\text{m}} = 100 \square^{\text{dm}} = 10000 \square^{\text{cm}} = 1000000 \square^{\text{mm}}$$

also auch

$$1 \square^{\text{mm}} = 0{,}01 \square^{\text{cm}} = 0{,}0001 \square^{\text{dm}} = 0{,}000001 \square^{\text{m}}$$
$$1 \square^{\text{cm}} = 0{,}01 \square^{\text{dm}} = 0{,}0001 \square^{\text{m}}$$
$$1 \square^{\text{dm}} = 0{,}01 \square^{\text{m}}.$$

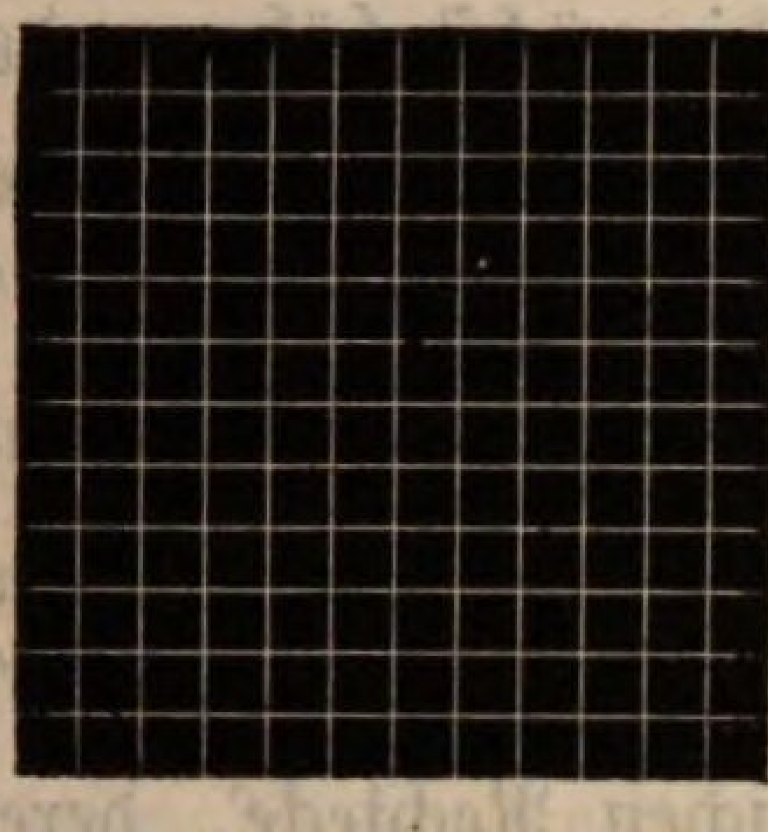
Es sind demnach auch

$$327{,}835786 \square^{\text{m}} = 327 \square^{\text{m}}\ 83 \square^{\text{dm}}\ 57 \square^{\text{cm}}\ 86 \square^{\text{mm}}$$
$$58273916 \square^{\text{mm}} = 58 \square^{\text{m}}\ 27 \square^{\text{dm}}\ 39 \square^{\text{cm}}\ 16 \square^{\text{mm}}$$

Durch ähnliche Beispiele müssen diese Reductionen gehörig geläufig gemacht werden. Auf ähnliche Weise vergleiche man die Flächenmaaßeinheiten, welche den Längeneinheiten des zehntheiligen Fußmaaßes ent-

sprechen, und diese alsdann wieder mit den Flächenmaaßeinheiten des Metermaaßes.

Fig. 69.



Wie viel Quadratcentimeter hat ein badischer (schweizerischer) Quadratzoll, wie viel Quadratdecimeter enthält ein badischer Quadratfuß u. s. w.?

Bei den älteren Fußmaaßen ist die Duodecimaltheilung durchgeführt; es ist also 1 Fuß gleich 12 Zoll, 1 Zoll gleich 12 Linien u. s. w. Demnach ist auch für das Duodecimalmaaß

$$1\,\square' = 12 \times 12 = 144\,\square'' = 144\,.\,12 = 1728\,\square'''$$
$$1\,\square'' = 144\,\square'''.$$

Fig. 69 stellt einen in 144 Quadratlinien getheilten Quadratzoll (altfranzösisches Maaß) dar.

Der Flächeninhalt länglicher Rechtecke. Wenn man 34
den Inhalt eines länglichen Rechtecks berechnen will, so muß man erst die Grundlinie und die Höhe in einer und derselben Einheit ausdrücken. Es sei z. B. die Grundlinie $2^{dm}\ 3^{cm}\ 4^{mm}$, die Höhe $3^{dm}\ 7^{cm}\ 2^{mm}$; will man Grundlinie und Höhe ganz in Millimetern ausdrücken und dann multipliciren, so erhält man den Inhalt in Quadratmillimetern ausgedrückt. Die Grundlinie ist 234^{mm}, die Höhe 372^{mm}, also der Inhalt $234 \times 372 = 87048\,\square^{mm}$. In Centimetern ausgedrückt, ist die Grundlinie $23{,}4^{cm}$, die Höhe $37{,}2^{cm}$, also der Inhalt $23{,}4 \times 37{,}2 = 870{,}48\,\square^{cm}$. In Decimetern ausgedrückt, ist die Grundlinie $2{,}34^{dm}$, die Höhe $3{,}72^{dm}$, also der Inhalt $2{,}34 \times 3{,}72 = 8{,}7048\,\square^{dm}$. Diese drei Resultate stimmen aber vollkommen überein, denn es ist $8{,}7048\,\square^{dm} = 870{,}48\,\square^{cm} = 87048\,\square^{mm}$.

Wie groß ist der Inhalt folgender länglichen Rechtecke, deren Grundlinie mit *g*, und deren Höhe mit *h* bezeichnet ist?

	g	*h*
1.	$3^{cm}\ 9^{mm}$	$1^{cm}\ 7^{mm}$
2.	$5^{dm}\ 2^{mm}$	$8^{dm}\ 7^{mm}$
3.	$1^{m}\ 3^{dm}\ 5{,}2^{cm}$	$2^{m}\ 5^{dm}\ 3{,}18^{cm}$

Wie groß ist der Inhalt dieser länglichen Rechtecke in badischem Fußmaaß ausgedrückt?

Für Duodecimalmaaße ist die Reduction auf eine und dieselbe Längeneinheit etwas umständlicher, indem man, um auf die nächst höhere oder die nächst tiefere Längeneinheit zu reduciren, mit 12 multipliciren oder dividiren muß. Es sei z. B. für ein längliches Rechteck $g = 3''2'''$, $h = 5''9'''$, so kann man die Längen entweder ganz in Zollen oder ganz in Linien ausdrücken. Im erstern Falle erhält man $g = 3 + {}^{2}/_{12} = 3{,}166''$ und $h = 5 + {}^{9}/_{12} = 5{,}75''$, mithin $J = 18{,}2045 \,\square''$.

Wie groß ist der Inhalt der folgenden länglichen Rechtecke, deren Seiten in preußischem Maaß ausgedrückt sind?

	g	h
1.	5'' 7'''	12'' 3'''
2.	7'' 5'''	3' 6'' 2'''
3.	2' 8'' 1'''	6' 3'' 4'''

Jedes Product zweier Größen, wie $a \times b$, stellt den Inhalt eines länglichen Rechtecks dar, dessen eine Seite a, dessen andere b ist. Ebenso stellt a^2 den Inhalt eines aus der Seite a construirten Quadrates dar.

Wenn der Inhalt und die Höhe eines länglichen Rechtecks gegeben sind, so findet man die Grundlinie, wenn man mit der Höhe in den Inhalt dividirt. Dabei ist noch zu bemerken, daß die Höhe durch die Längeneinheit ausgedrückt sein muß, welche der Flächeneinheit entspricht, in welcher der Inhalt ausgedrückt ist. Ist z. B. der Inhalt in Quadratzollen ausgedrückt, so muß auch die Höhe in Zollen ausgedrückt sein; der gefundene Quotient ist dann die in derselben Einheit ausgedrückte Grundlinie.

Ebenso findet man die Höhe, wenn man mit der Grundlinie in den Inhalt dividirt.

Wie groß ist die Höhe folgender Rechtecke, deren Inhalt J und deren Grundlinie g gegeben ist?

g	J
2cm 3mm	9□cm 20□mm
3cm 5mm	5□cm 95□mm
1,9cm	6□cm

Wie groß ist die Grundlinie folgender Rechtecke, deren Inhalt J, und deren Höhe h in preußischem Maaß ausgedrückt ist?

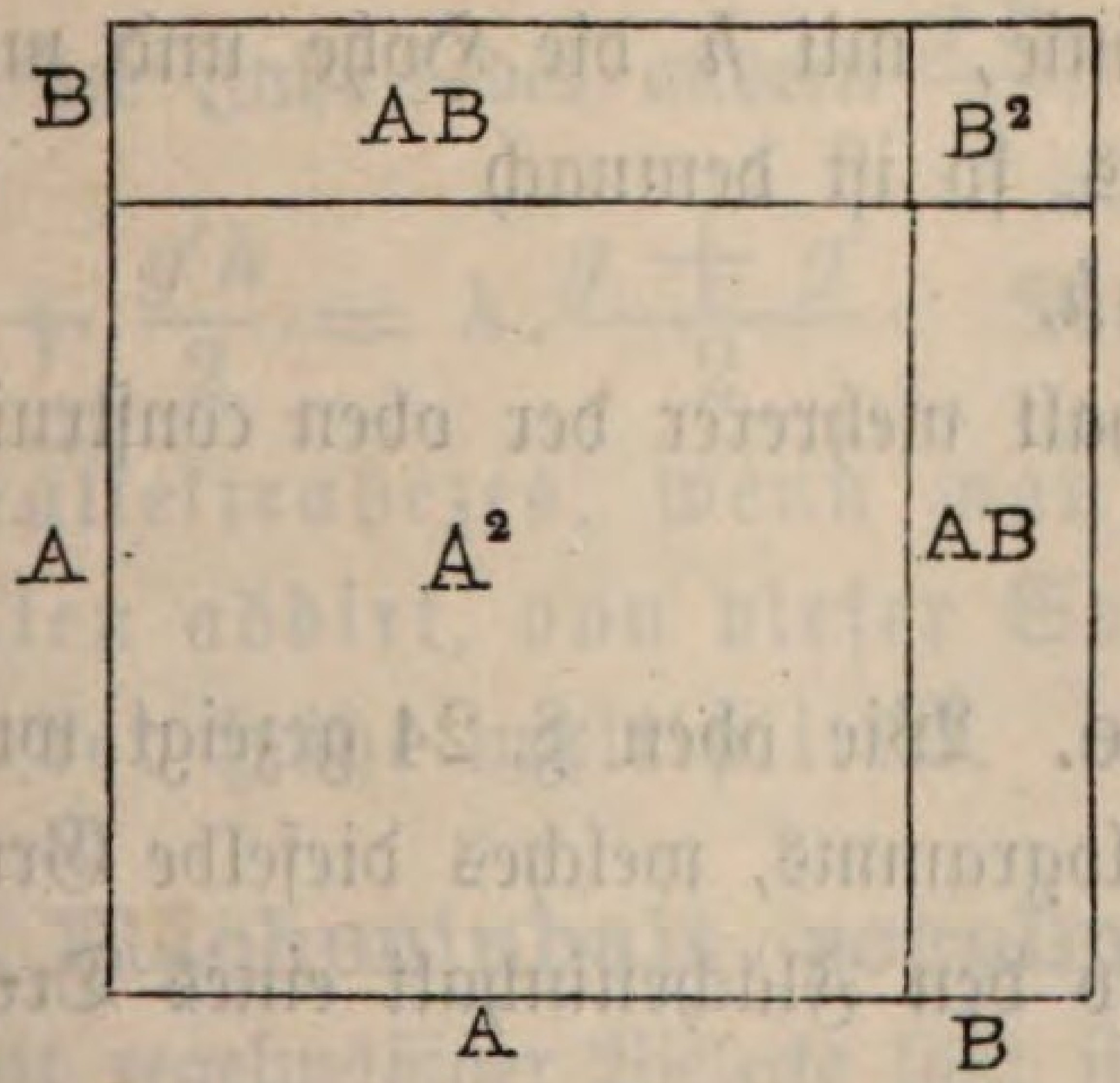
h	J
3″ 11‴	12□″ 7□‴
1′ 9″	3□′ 5□″
8′ 7″ 6‴	32□′ 94□″ 135□‴

Ist die Seite eines Quadrates gleich der Summe zweier Linien A und B, so ist sein Inhalt

$$(A+B)\times(A+B)=(A+B)^2=A^2+2.A.B+B^2;$$

das ganze Quadrat besteht aus dem Quadrate der Linie A, dem Quadrate der Linie B und zwei länglichen Rechtecken, deren Seiten A und B sind, wie dies Fig. 70 erläutert, in welcher $A = 30^{mm}$, $B = 7^{mm}$ ist. Das Quadrat von 37 besteht in der That aus den Quadraten von 30, dem doppelten Producte von 30 und 7 und dem Quadrate von 7 (900 + 2.210 + 49).

Fig. 70.

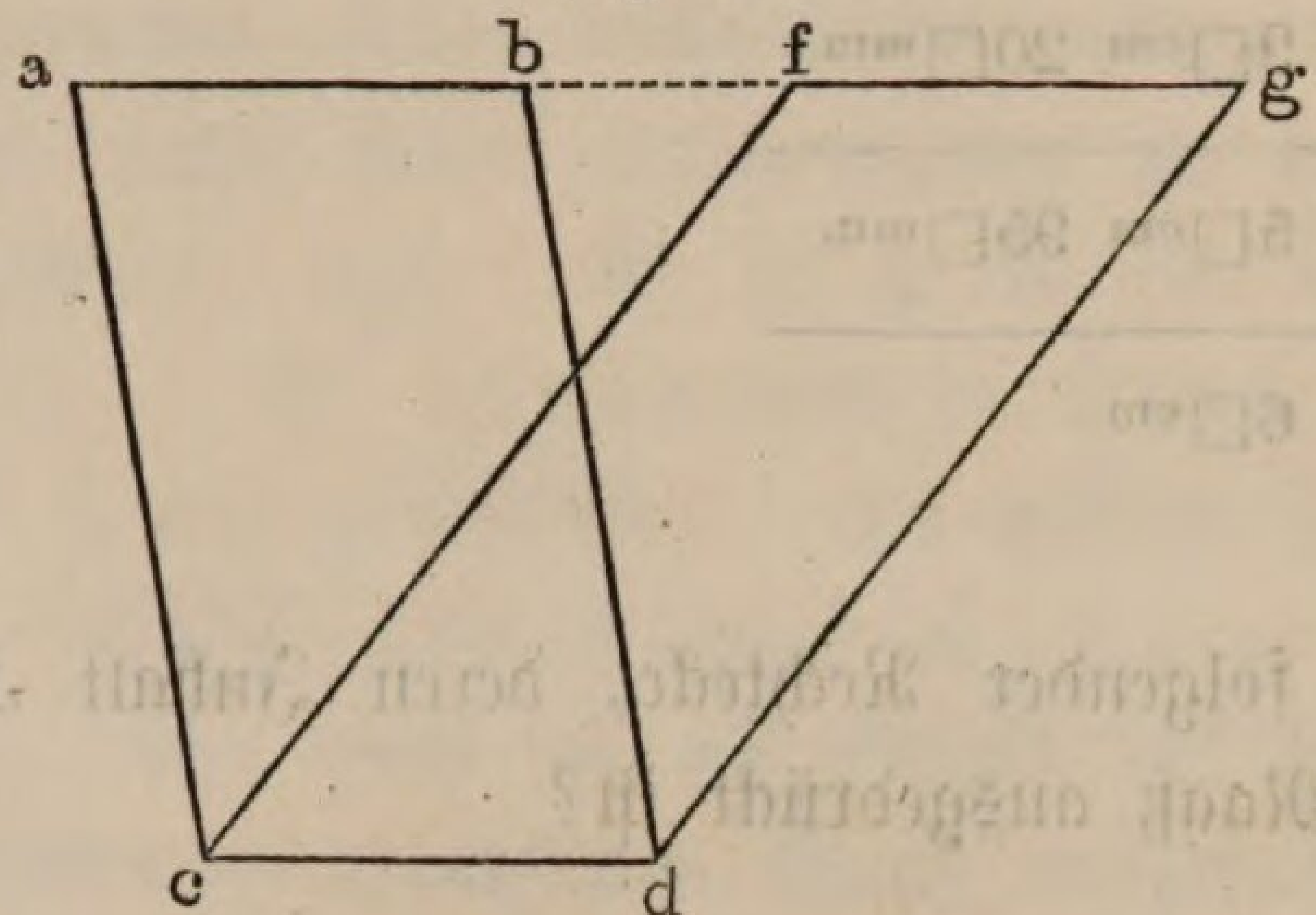


Hier muß noch ganz besonders die Uebereinstimmung der geometrischen Construction mit der Bildung der Quadrate zweitheiliger Wurzeln hervorgehoben werden.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und 35
Höhe haben gleichen Flächeninhalt.

Beweis. Es seien $abcd$ und $cdgf$ (Fig. 71) zwei Parallelogramme, welche die gemeinschaftliche Grundlinie cd haben; daß beide gleiche Höhe haben, erkennt man daran, daß die Seiten ab und gf, welche der Grundlinie gegenüberliegen, in einer mit cd parallelen Linie liegen. Zieht man bf, so entsteht eine vierseitige Figur $acdg$. Nimmt man von dieser das Dreieck acf weg, so bleibt das Parallelogramm $cdgf$ übrig; nimmt man aber von $acdg$ das Dreieck bdg weg, so bleibt das Parallelogramm $abcd$ übrig.

Fig. 71.



Nun ist aber das Dreieck acf gleich dem Dreieck bdg, denn

$$\left.\begin{array}{l} ac = bd \\ cf = dg \end{array}\right\} \text{§. 23.}$$
$$\underline{\measuredangle acf = \measuredangle bdg \text{ §. 8.}}$$
$$\triangle acf = \triangle bdg \text{ (II.).}$$

Mag man also das Dreieck acf oder das Dreieck bdg von $acdg$ wegnehmen, so muß doch gleich viel übrig bleiben, folglich

$$abcd = cdgf.$$

Da nun alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe gleich groß sind, so haben sie auch denselben Flächeninhalt wie ein längliches Rechteck, welches dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Man findet demnach den Inhalt eines Parallelogramms, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

Bezeichnen wir mit g die Grundlinie, mit h die Höhe und mit J den Flächeninhalt eines Parallelogramms, so ist demnach

$$J = gh.$$

Zur Uebung berechne man den Inhalt mehrerer der oben construirten Parallelogramme.

36 **Flächeninhalt der Dreiecke.** Wie oben §. 24 gezeigt wurde, ist jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms, welches dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Man berechnet also den Flächeninhalt eines Dreiecks nach der Formel

$$J = \frac{gh}{2},$$

oder in Worten: man findet den Inhalt eines Dreiecks, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt und das gefundene Product durch 2 dividirt, oder was dasselbe ist, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multiplicirt.

Man berechne den Inhalt mehrerer der oben construirten Dreiecke.

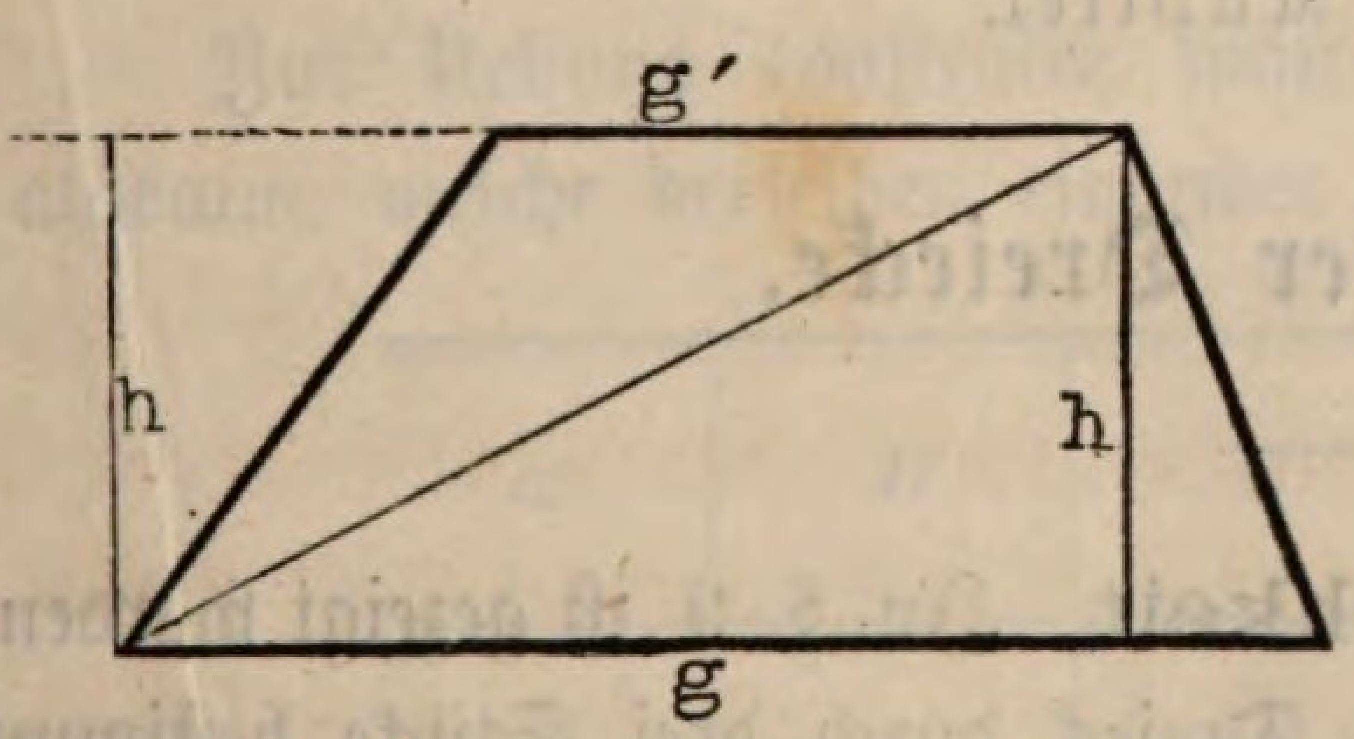
Dividirt man mit der halben Grundlinie in den Inhalt, so erhält man die Höhe des Dreiecks; dividirt man mit der halben Höhe in den Inhalt, so erhält man die Grundlinie.

Flächeninhalt der Vielecke. Jedes Vieleck, es mag eine Form haben, welche man will, läßt sich durch Diagonale in Dreiecke zerlegen. Berechnet man nun den Inhalt eines jeden dieser Dreiecke für sich, so findet man den Inhalt des Vielecks, wenn man die Inhalte der einzelnen Dreiecke addirt. 37

Zur Uebung zeichne man mehrere ganz beliebige Vielecke und bestimme ihren Inhalt.

Wenden wir dies Verfahren auf ein Paralleltrapez an: die eine der beiden parallelen Seiten (Fig. 72) sei g, die andere g', ihre Entfernung von einander h. Zieht man eine Diagonale, so entstehen zwei Dreiecke; g ist die Grundlinie des einen, h seine Höhe; die Grundlinie des andern ist g', seine Höhe ebenfalls h. Der Inhalt des ersten Dreiecks ist demnach $\frac{gh}{2}$, der Inhalt des andern $\frac{g'h}{2}$, folglich der Inhalt der ganzen Figur $\frac{gh}{2} + \frac{g'h}{2} = h.\frac{g+g'}{2}$. Man findet also den Inhalt eines Paralleltrapezes, wenn man die Länge der beiden parallelen Seiten addirt, von dieser Summe die Hälfte nimmt, und dann mit der Höhe multiplicirt.

Fig. 72.



Flächeninhalt regelmässiger Vielecke. Der Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke läßt sich noch auf eine einfachere, als die eben angegebene Weise bestimmen, denn wenn man von dem Mittelpunkte Radien nach den Eckpunkten zieht, so wird das Vieleck in eben so viel 38

gleiche Dreiecke zerlegt, als es Seiten hat. Ist also nur einmal der Inhalt eines solchen Dreiecks bestimmt, so findet man durch eine Multiplication den Inhalt des ganzen Vielecks. Es sei n die Anzahl der Seiten des Vielecks, s eine Vielecksseite, h ein vom Mittelpunkte auf die Vielecksseite gefälltes Perpendikel, so ist $\frac{s.h}{2}$ der Inhalt eines Theildreiecks und mithin $\frac{n.s.h}{2}$ der Inhalt der ganzen Figur; $n.s$ ist aber der Umfang der Figur; bezeichnen wir denselben mit u, so ist also der Inhalt der Figur $\frac{u.h}{2}$, d. h. man findet den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks, wenn man den Umfang mit dem aus dem Mittelpunkte auf eine Vielecksseite gefällten Perpendikel multiplicirt und das Product durch 2 dividirt; oder auch, wenn man den halben Umfang mit diesem Perpendikel, oder das halbe Perpendikel mit dem Umfange multiplicirt.

Siebentes Kapitel.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

---

39 **Bedingungen der Aehnlichkeit.** In §. 9 ist gezeigt worden, daß es fünf Fälle giebt, in denen ein Dreieck durch drei Stücke bestimmt ist, nter denen sich aber wenigstens *eine* Seite befinden muß. Auch kann man die Gleichheit zweier Dreiecke nur dann beweisen, wenn man außer der Gleichheit der entsprechenden Winkel nachweisen kann, daß eine Seite des einen der entsprechenden Seite des andern gleich ist. Durch die drei Winkel ist ein Dreieck noch nicht bestimmt, es können demnach in zwei Dreiecken die entsprechenden Winkel gleich sein, ohne daß es deshalb auch die entsprechenden Seiten sind. Zwei Dreiecke nun, in welchen die entsprechenden Winkel gleich, aber die entsprechenden Seiten nicht gleich sind, sind einander *ähnlich*. Um also die *Aehnlichkeit* zweier Dreiecke nachzuweisen, hat man nur die Gleichheit der entsprechenden Winkel zu zeigen. Die beiden Dreiecke Fig. 73 und Fig. 74 sind ähnlich, weil jeder Winkel des einen dem gleich bezeichneten Winkel des andern Dreiecks gleich ist.

Bekanntlich ist der dritte Winkel eines Dreiecks durch die Größe der beiden anderen bestimmt, indem die drei Winkel zusammengenommen zwei

Fig. 73.

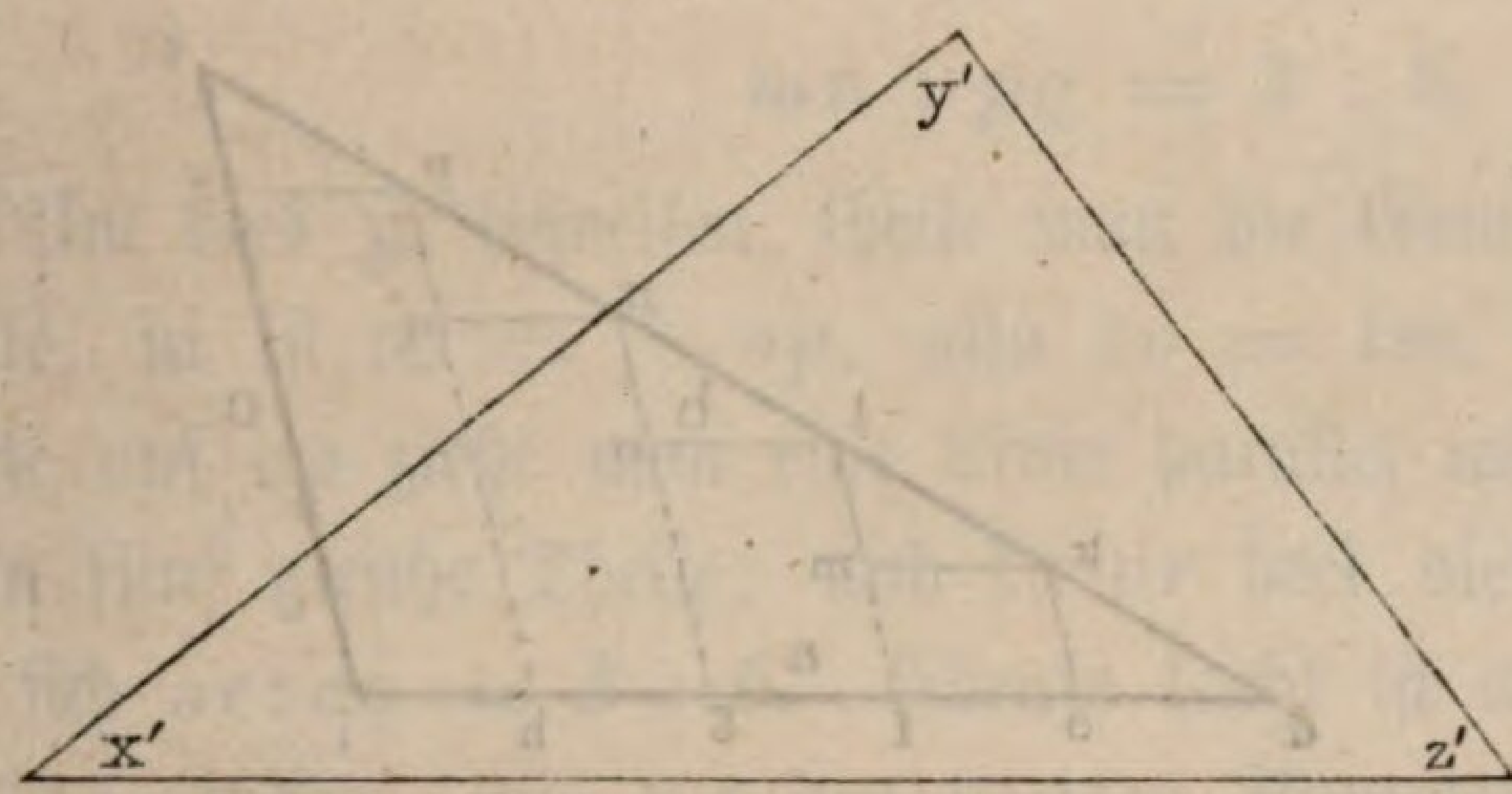
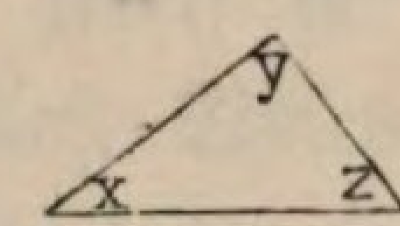


Fig. 74.



Rechte betragen müssen. Kann man also nur nachweisen, daß zwei Winkel eines Dreiecks den beiden entsprechenden Winkeln eines andern gleich sind, so reicht dies schon hin, die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke zu beweisen, denn alsdann ist auch der dritte Winkel in beiden gleich. Hätte man z. B. zwei Dreiecke, deren jedes einen Winkel von 50° und einen von 100° enthält, so sind sie ähnlich, denn in diesem Falle sind alle Winkel des einen den entsprechenden Winkeln des andern gleich; der dritte Winkel muß in jedem der beiden Dreiecke 30° sein.

Zur Uebung construire man folgende sechs Dreiecke, und bestimme alsdann, welche derselben einander ähnlich sind.

a	*B*	*C*	*a*	*B*	*C*
3″	90°	40°	72mm	60°	50°
2″ 7‴	115°	40°	24mm	60°	50°
1″	90°	40°	21mm	115°	40°

Proportionalität der Seiten. Wenn das Dreieck, dessen Seiten 40
mit **a**, **b** und **c**, Fig. 75 (a. f. S.), bezeichnet sind, dem Dreieck, Fig. 76, dessen Seiten *a*, *b* und *c* sind, ähnlich ist; wenn ferner die Seite **a** der fünfte Theil der Seite *a* ist, so muß auch **b** $= \frac{1}{5} b$ und **c** $= \frac{1}{5} c$ sein. Um diese Behauptung zu beweisen, trage man die Seite **a** fünfmal auf *a* auf, so daß $de = ef = fg = gh = hi =$ **a**, was jedenfalls möglich ist, da der Voraussetzung nach **a** $= \frac{1}{5} a$ sein soll. Durch jeden der Punkte *e*, *f*, *g* und *h* ziehe man eine Linie parallel mit *c*. Diese vier Linien schneiden die Linie *b* in den Punkten *k*, *l*, *n* und *p*. Zieht man nun

ferner durch die Punkte *k, l, n* und *p* die Linien *km, lo, nq* und *pr* mit *a* parallel, so entstehen die Dreiecke *dke, klm, lno, npq* und *psr,*

Fig. 75.

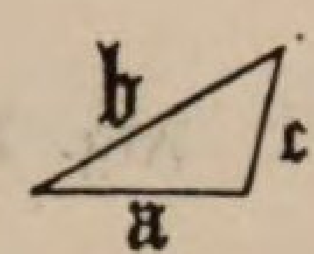
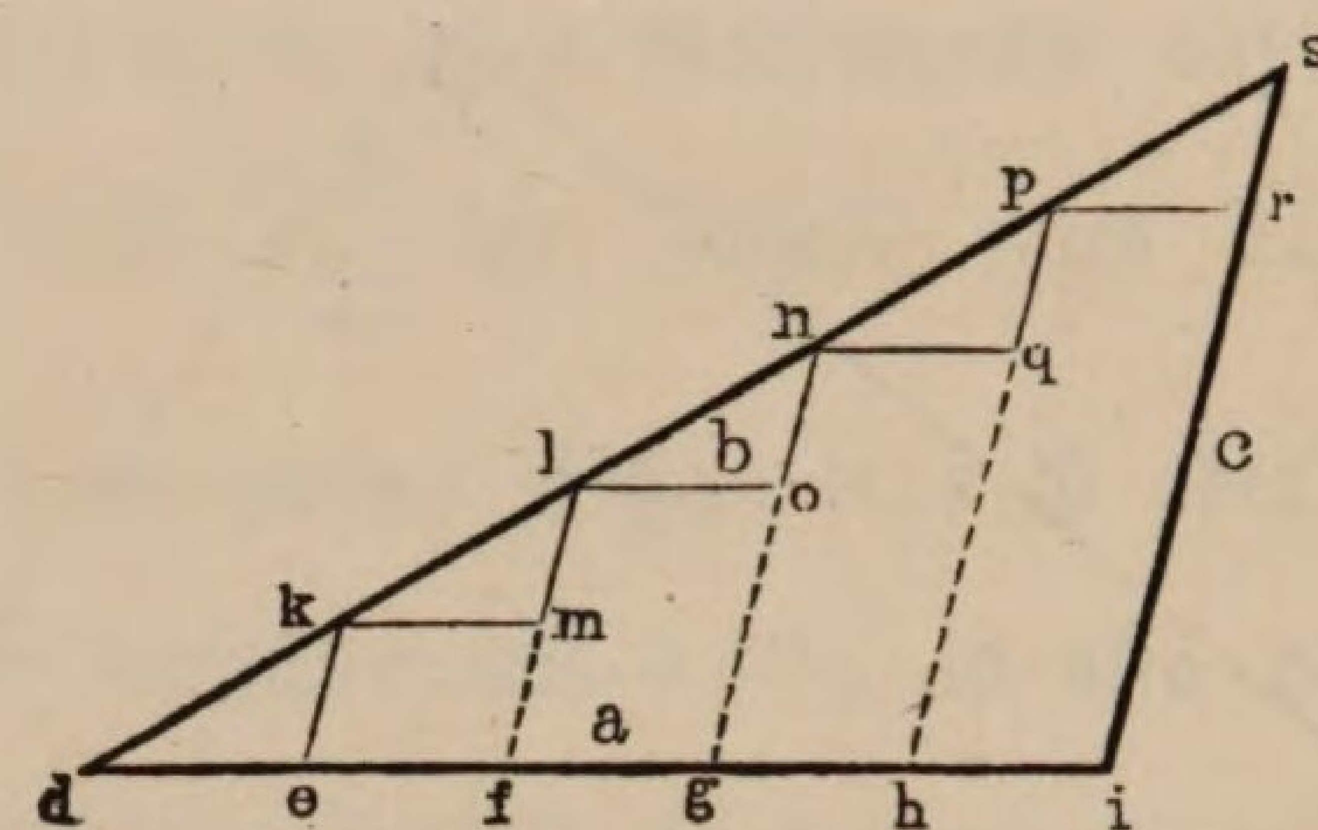


Fig. 76.



welche sowohl unter sich, als auch dem Dreieck Fig. 75 gleich sind (warum? wird der Leser wohl ohne Schwierigkeit nachweisen können).

Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt aber nun, daß $dk = kl = ln = np = ps$, daß also wirklich $\mathfrak{b} = \frac{1}{5} b$. Ferner folgt aus der Gleichheit dieser Dreiecke, daß $ke = lm = no = pq = sr = \mathfrak{c}$ ist. Da nun ferner auch $mf = ke = \mathfrak{c}$, so ist $lf = 2\,\mathfrak{c}$, folglich ist auch $og = 2\,\mathfrak{c}$ und $ng = 3\,\mathfrak{c}$, und so weiter schließend, ergiebt sich endlich auch, daß si oder $c = 5\,\mathfrak{c}$, wie oben behauptet wurde.

Wäre $\mathfrak{a}$ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ ... $\frac{1}{n}$ von a gewesen, so würde auch $\mathfrak{b}$ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ ... $\frac{1}{n}$ von b, und $\mathfrak{c}$ der 3te, 4te, 6te ... $n$te Theil von c gewesen sein, was sich ganz auf die eben durchgeführte Art beweisen läßt.

Dieser Satz läßt sich in Worten ganz allgemein so ausdrücken: Wenn zwei Dreiecke einander ähnlich sind, und die eine Seite des kleinern irgend ein aliquoter Theil der entsprechenden Seite des größern Dreiecks ist, so betragen auch die anderen Seiten des kleinern Dreiecks den eben so vielsten Theil der entsprechenden Seiten des großen.

Die beiden Dreiecke *lmn* (Fig. 78) und *opq* (Fig. 79) seien

Fig. 78.

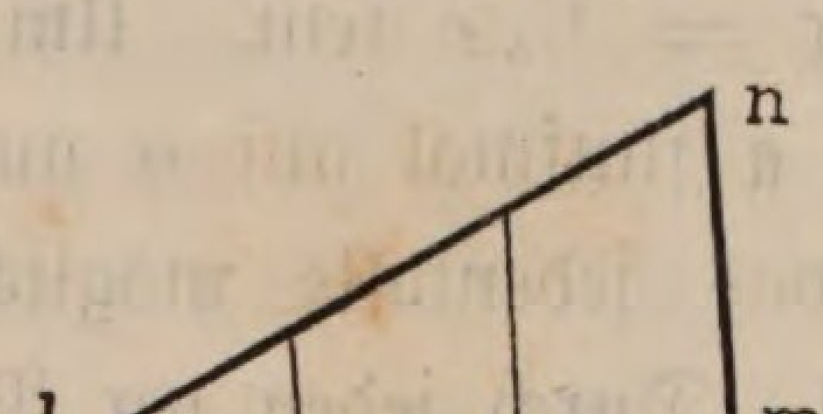
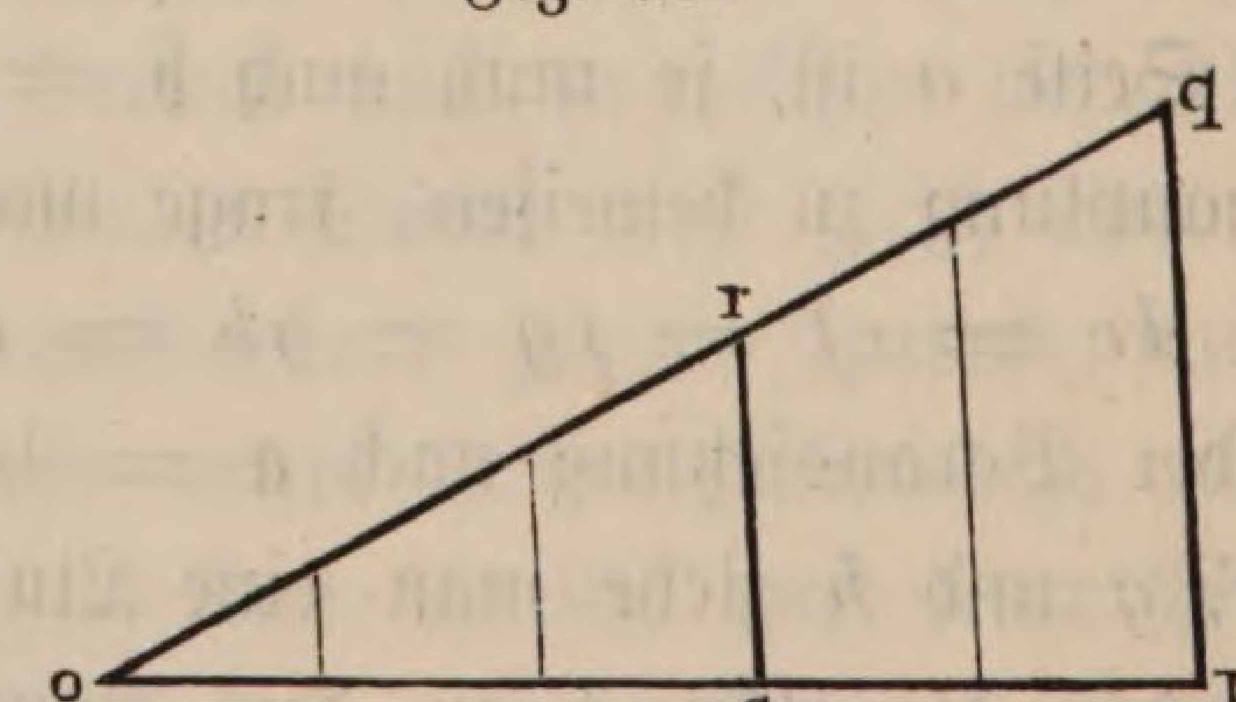


Fig. 79.



ähnlich. Wenn sich nun die Grundlinie *lm* zu *op* verhält wie 3:5, so ist auch

$$ln : oq = 3 : 5$$

und

$$mn : pq = 3 : 5.$$

Um dies zu beweisen, theile man die Grundlinie *op* in fünf gleiche Theile, so ist $os = {}^3/_5\, op$, also $so = lm$. Durch jeden der Theilpunkte auf *op* ziehe man eine Linie parallel mit *pq*; diese Linien theilen *oq* in fünf gleiche Theile, und da *or* drei dieser Theile beträgt, so verhält sich $or : oq = 3 : 5$. Ebenso leicht ist auch zu zeigen, daß $rs : pq = 3 : 5$, indem, wie aus den vorigen Nummern folgt, *rs* dreimal und *pq* fünfmal so groß ist, als die Linie, welche durch den nach *o* zuerst folgenden Theilpunkt der Grundlinie mit *pq* parallel gezogen ist. Alle Seiten des Dreiecks *ors* verhalten sich also zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks *opq* wie 3 : 5; da aber, wie leicht zu beweisen ist, das Dreieck $lmn = \triangle\, ors$, so stehen also auch alle Seiten des Dreiecks *lmn* zu den entsprechenden des Dreiecks *opq* in dem Verhältniß von 3:5.

Man construire zwei ähnliche Dreiecke, deren Grundlinien sich verhalten wie 4 : 7, und beweise auf die eben durchgeführte Weise, daß auch die anderen einander entsprechenden Seiten beider Dreiecke in demselben Verhältniß stehen.

Auf die angeführte Art läßt sich immer beweisen, daß wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, alle Seiten des einen in demselben Verhältnisse zu den entsprechenden Seiten des andern stehen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die drei Seiten des einen, mit *a*, *b* und *c* die drei Seiten des andern, und zwar so, daß gleiche Buchstaben entsprechenden Seiten angehören, so ist demnach

$$a : \mathfrak{a} = b : \mathfrak{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a : \mathfrak{a} = c : \mathfrak{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus der Lehre von den Proportionen ist bekannt, daß man die mittleren Glieder einer geometrischen Proportion mit einander vertauschen kann, ohne daß dadurch die Richtigkeit der Proportion gestört wird. Aus den beiden Proportionen 1 und 2 zieht man durch diese Vertauschung

$$a : b = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

$$a : c = \mathfrak{a} : \mathfrak{c}.$$

Wenn also zwei Dreiecke ähnlich sind, so stehen je zwei Seiten des

einen unter einander in demselben Verhältniß, in welchem die den beiden entsprechenden Seiten des andern zu einander stehen.

So zieht man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Fig. 78 und Fig. 79 zunächst die Proportionen

$$lm : op = ln : oq$$
$$lm : op = mn : pq$$
$$ln : oq = mn : pq$$

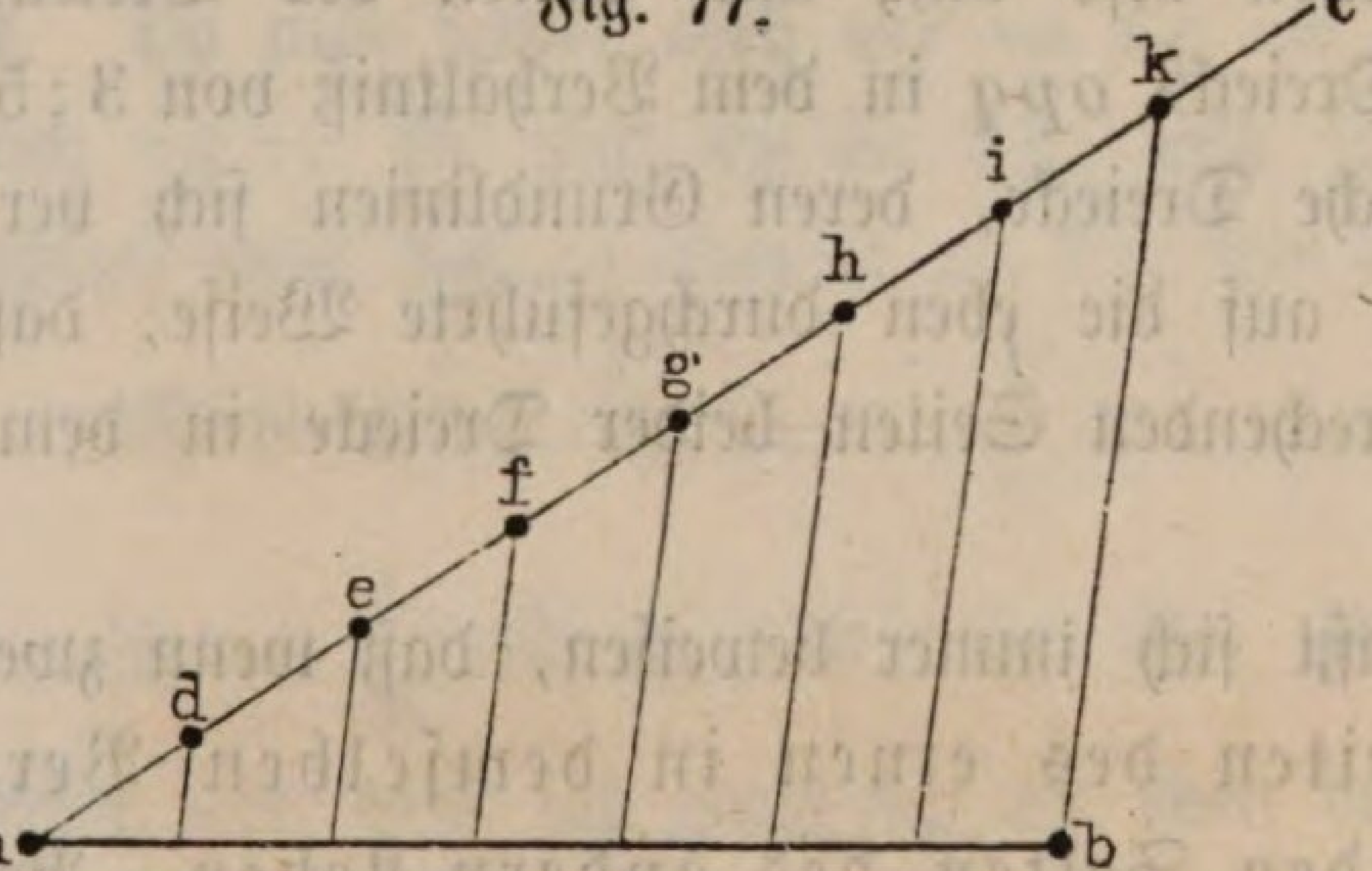
und durch die Vertauschung der mittleren Glieder

$$lm : ln = op : oq$$
$$lm : mn = op : pq$$
$$ln : mn = oq : pq.$$

41 **Aufgabe.** Eine gegebene gerade Linie in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Die Linie ab (Fig. 77) sei in sieben gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch den einen Endpunkt a der gegebenen Linie eine Linie ac in beliebiger Richtung und von unbestimmter Länge, trage alsdann von a an siebenmal eine beliebige Länge ad auf, so daß $ad = de = ef = fg$ u. s. w. Zieht man nun von k nach b und mit kb parallel Linien durch die Punkte d, e, f, g, h und i, so theilen diese die Linie ab in sieben gleiche Theile. Der Beweis ergiebt sich leicht aus dem vorigen Paragraphen.

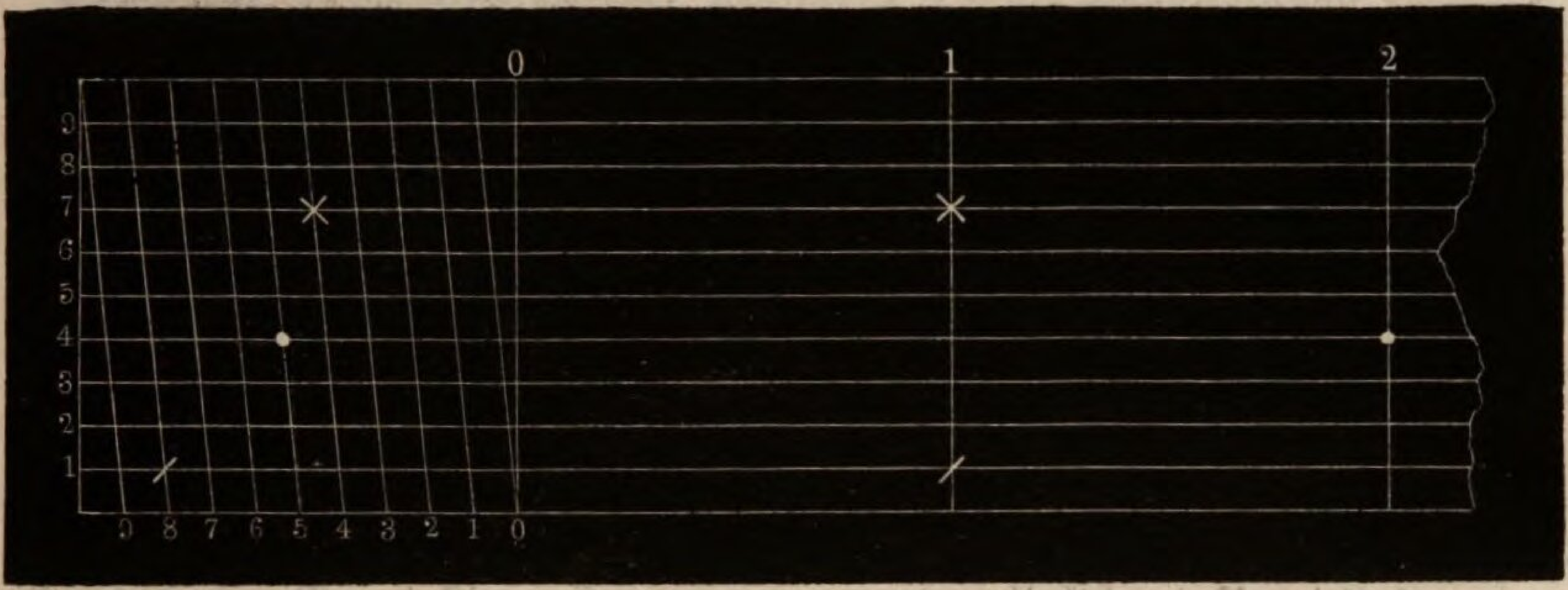
Fig. 77.



42 **Der tausendtheilige Maassstab.** Auf die in den letzten Paragraphen besprochenen Sätze gründet sich die Construction des sogenannten tausendtheiligen Maaßstabes, welcher gestattet, Längen bis auf Unterabtheilungen (etwa $^1/_{10}$ Linien) genau zu messen, welche zu klein sind, als daß man sie unmittelbar auf eine gerade Linie auftragen könnte. Fig 80 stellt ein Stück eines solchen Maaßstabes (badische Zolle und Linien) dar. Der Maaßstab besteht nicht aus einer einzigen getheilten Linie, sondern er wird durch 11 um 1 Linie von einander abstehende Horizontallinien gebildet. Die ganzen Zolle sind von der oben und unten mit 0 bezeichneten Verticallinie nach rechts gezählt (und zwar enthält unsere Figur

deren nur noch zwei, während in der Regel der Maaßstab von 0 an noch 10 Zoll mißt), die Linien (‴) aber nach der Linken. Der letzte Zoll von 0 an links ist nämlich auf der obersten und auf der untersten Ho-

Fig. 80.



rizontallinie in 10 gleiche Theile getheilt, alsdann aber ist von dem Theilpunkte 1 auf der obersten horizontalen eine schräge Linie nach 0 auf der untersten gezogen und mit dieser parallel dann weiter

Fig. 81.



von 2 oben nach 1 unten
„ 3 „ „ 2 „
„ 4 „ „ 3 „
„ 5 „ „ 4 „

u. s. w. Auf diese Weise entstehen auf beiden Seiten des in Linien getheilten Zolles kleine spitze Dreiecke von 1″ Höhe und 1‴ Basis, von denen das rechter Hand Fig. 81 für sich allein gezeichnet ist. Dieses Dreieck wird nun von den horizontalen Linien durchschnitten, von denen wir die allerunterste mit 0, die nächste mit 1, die folgende mit 2 u. s. w., die oberste endlich mit 0 bezeichnen wollen. Diejenige Länge dieser Horizontalen, welche zwischen die verticale 00 in Fig. 80 oder *bc* Fig. 81 einerseits und die nächste schräge (*ac* in Fig. 81) andererseits fällt, ist nun

für die Horizontallinie 1 gleich 0,1‴
„ „ „ 2 „ 0,2‴
„ „ „ 3 „ 0,3‴
„ „ „ 4 „ 0,4‴

u. s. w.; man kann also auf diesem Maaßstab bis auf $^1/_{10}$ Linie genau messen, nur muß man die Messung auf der entsprechenden Horizontallinie vornehmen und zwar auf der Horizontallinie 1, 2, 3 ... 9, wenn $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ ... $^9/_{10}$ Linie abzumessen ist.

Es sei z. B. die Länge 1″ 4,7‴ abzumessen, so hat man in Fig. 80 auf der Horizontallinie 7 die Länge zu nehmen zwischen der oben mit 1 bezeichneten Verticallinie und der unten mit 4 bezeichneten schrägen. Die Endpunkte dieser Länge sind in unserer Figur mit × bezeichnet. Der Abstand der beiden in unserer Figur mit • bezeichneten Punkte ist 2″ 5,4‴. Die Länge 1″ 8,1‴ ist auf der Horizontallinie 1 in der Weise abzugreifen, wie es durch die kleinen Querstriche / bezeichnet ist.

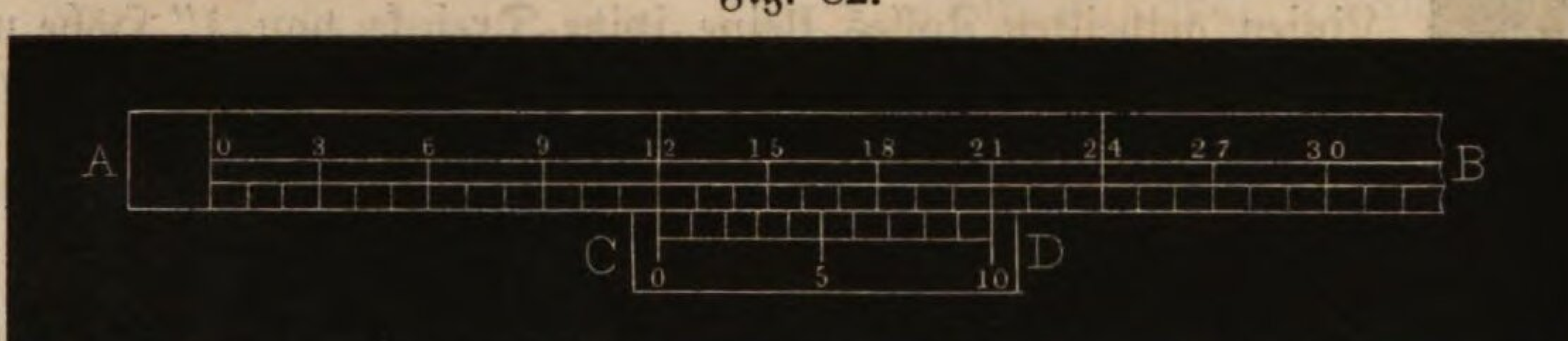
Zur Uebung greife man mit dem Zirkel auf obigem Maaßstab ab:

0,7‴	1″ 3,9‴
5,3‴	1″ 9,2‴
8,8‴	2″ 1,6‴

43 **Der Nonius.** Eine andere Vorrichtung, welche dazu dient, Längen bis auf kleine Unterabtheilungen genau zu messen, ist der Nonius (nach seinem Erfinder so genannt), dessen Wesen darin besteht, daß längs der Haupttheilung ein kleineres getheiltes Plättchen, der Nonius, verschiebbar ist, dessen Theilung zu der Haupttheilung in solcher Beziehung steht, daß die Länge von n Theilen der Haupttheilung auf dem verschiebbaren Täfelchen in $n + 1$ oder $n - 1$ Theile getheilt ist.

Wir wollen dies an einem speciellen Beispiel erläutern. In Fig. 82 sei AB die in Pariser Linien getheilte Haupttheilung; CD ist der No-

Fig. 82.



nius, welcher hier gerade so gestellt ist, daß der Theilstrich 0 des Nonius mit dem Theilstrich 12 der Haupttheilung, der Theilstrich 10 des Nonius aber mit dem Theilstrich 21 der Haupttheilung zusammenfällt. Man übersieht bei dieser Stellung leicht, daß die Länge von 9‴ der Haupttheilung auf dem Nonius in 10 gleiche Theile getheilt ist, es sind also

$$10 \text{ Noniustheile } . = 9'''$$
$$1 \text{ Noniustheil } . = {}^{9}/_{10}'''$$

1 Noniustheil ist also um $^1/_{10}$ Linie kleiner als 1‴.

Wenn also irgend ein Theilstrich des Nonius mit einem Theilstrich der Haupttheilung zusammenfällt, so wird von diesem an gerechnet der

1ste, 2te, 3te u. s. w. Theilstrich des Nonius vom 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Theilstrich der Haupttheilung um $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ u. s. w. Linie abstehen.

So ist z. B. in Fig. 82 der Abstand des

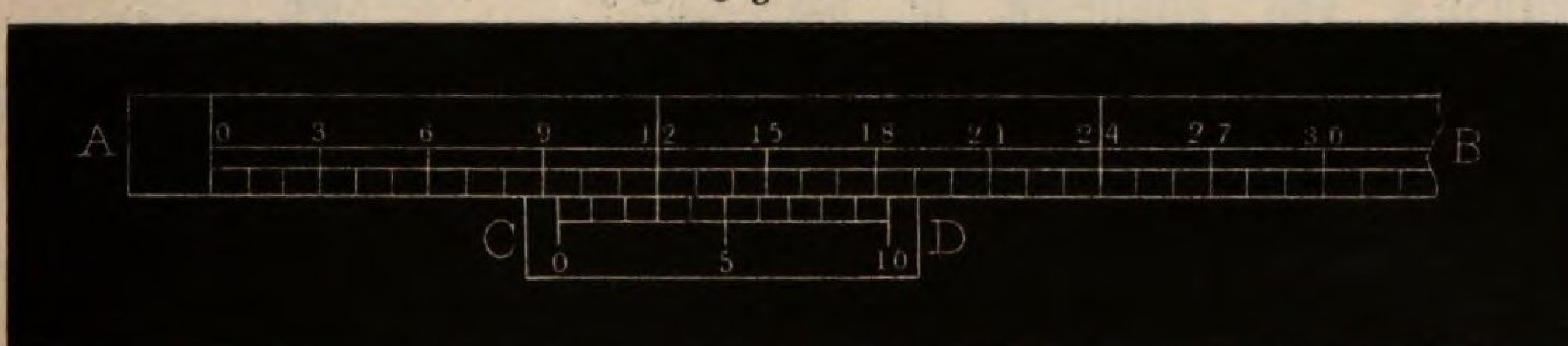
Theilstrichs	1	des	Nonius	vom	Theilstrich	13	der	Haupttheilung	= 0,1‴
„	2	„	„	„	„	14	„	„	= 0,2‴
„	3	„	„	„	„	15	„	„	= 0,3‴
„	4	„	„	„	„	16	„	„	= 0,4‴
„	5	„	„	„	„	17	„	„	= 0,5‴
„	6	„	„	„	„	18	„	„	= 0,6‴

u. s. w.

Wird nun der Nonius längs der Haupttheilung verschoben, so kann man für jede Stellung des Nonius bis auf $^1/_{10}$ Linie genau angeben, wie weit die durch den Nullpunkt des Nonius bezeichnete Stelle vom Nullpunkte der Haupttheilung absteht.

In Fig. 83 z. B. steht der Nullpunkt des Nonius zwischen den Theilstrichen 10 und 11 der Haupttheilung. Geht man aber vom Null=

Fig. 83.



punkte des Nonius nach der Rechten, so findet man, daß der Theilstrich 6 des Nonius mit einem Theilstrich (und zwar dem Theilstrich 16) der Haupttheilung zusammenfällt. Es ist also der Abstand des

Theilstrichs	5	des	Nonius	vom	Theilstrich	15	der	Haupttheilung	= 0,1‴
„	4	„	„	„	„	14	„	„	= 0,2‴
„	3	„	„	„	„	13	„	„	= 0,3‴
„	2	„	„	„	„	12	„	„	= 0,4‴
„	1	„	„	„	„	11	„	„	= 0,5‴
„	0	„	„	„	„	10	„	„	= 0,6‴

Die in Fig. 83 durch den Nullpunkt des Nonius bezeichnete Stelle ist also 10,6‴ vom Nullpunkte der Haupttheilung entfernt.

Bei der Stellung, welche der Nonius in Fig. 84 (a. f. S.) gerade einnimmt, ist der Abstand vom Nullpunkte der Haupttheilung bis zum Nullpunkte des Nonius gleich 9,3 Linien.

Wie groß ist der Abstand der beiden Nullpunkte bei der in Fig. 85 verzeichneten Stelle des Nonius?

Fig. 84.

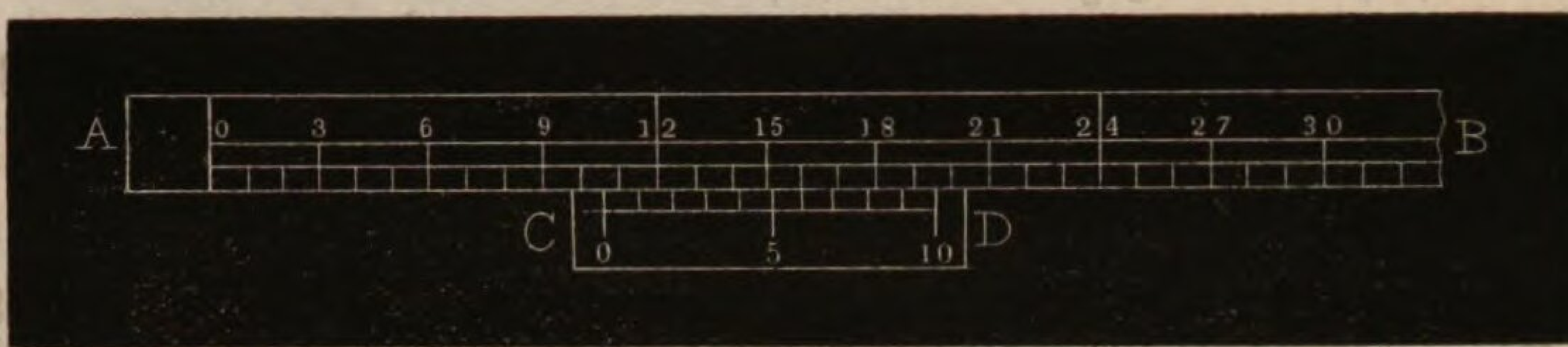
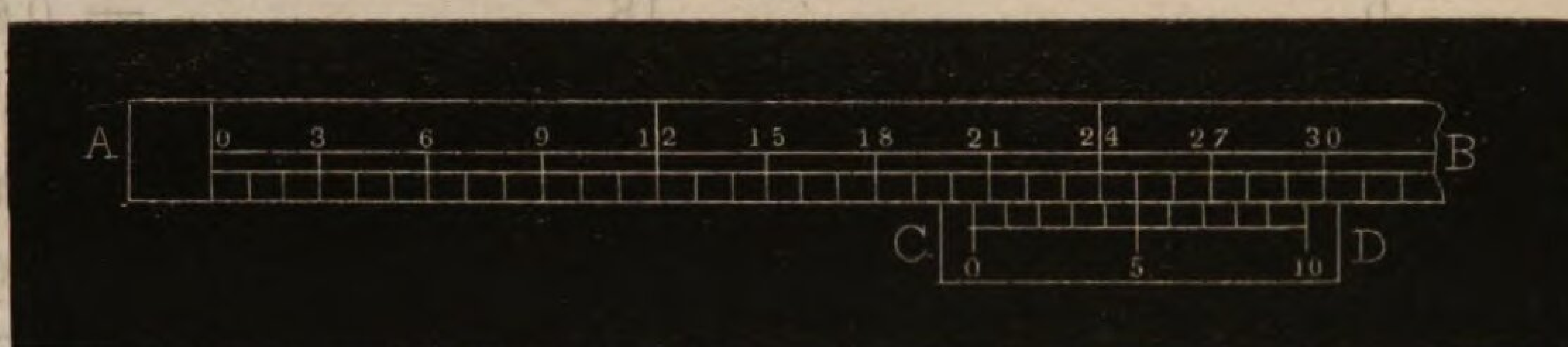


Fig. 85.



Um beim Unterricht die Ablesung des Nonius einzuüben, ist ein in großem Maaßstabe ausgeführtes Modell einer solchen Vorrichtung zu empfehlen, bei welchem etwa die Haupttheilung in Zollen ausgeführt und auf dem

Fig. 86.

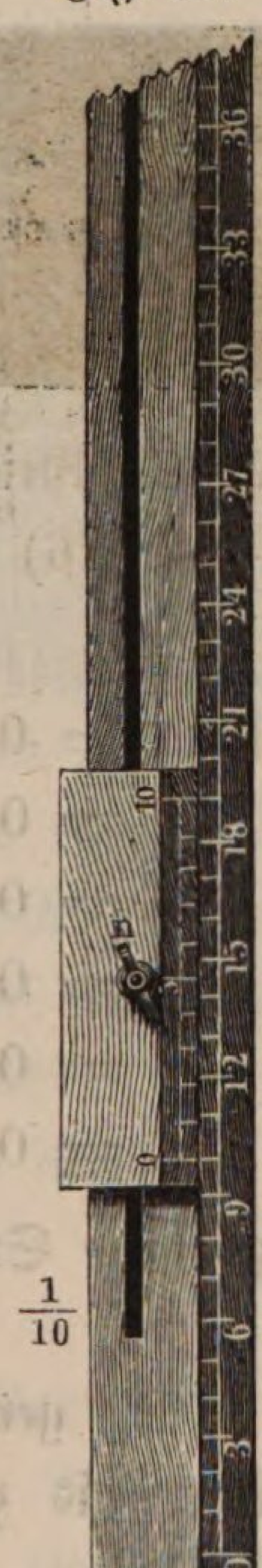
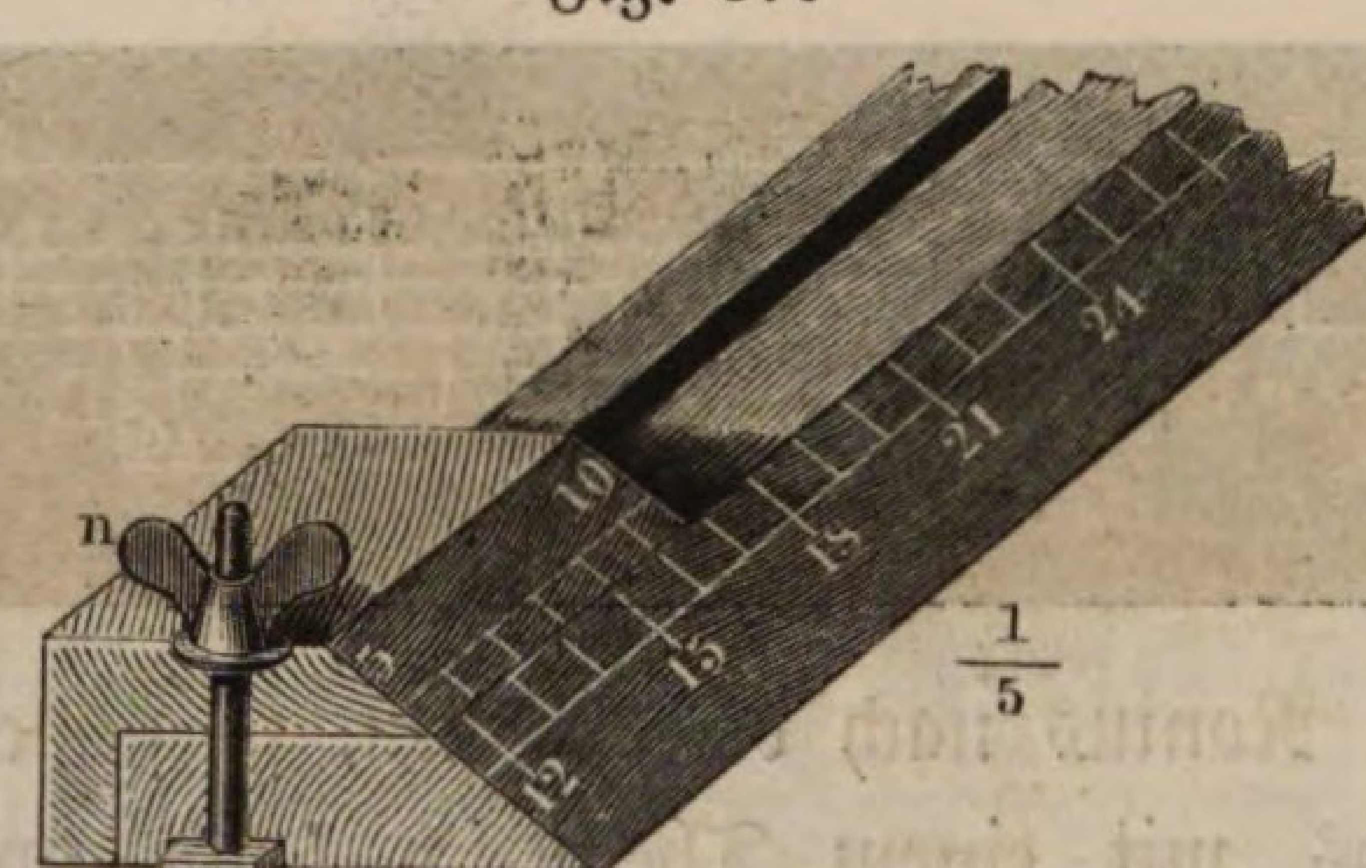


Fig. 87.

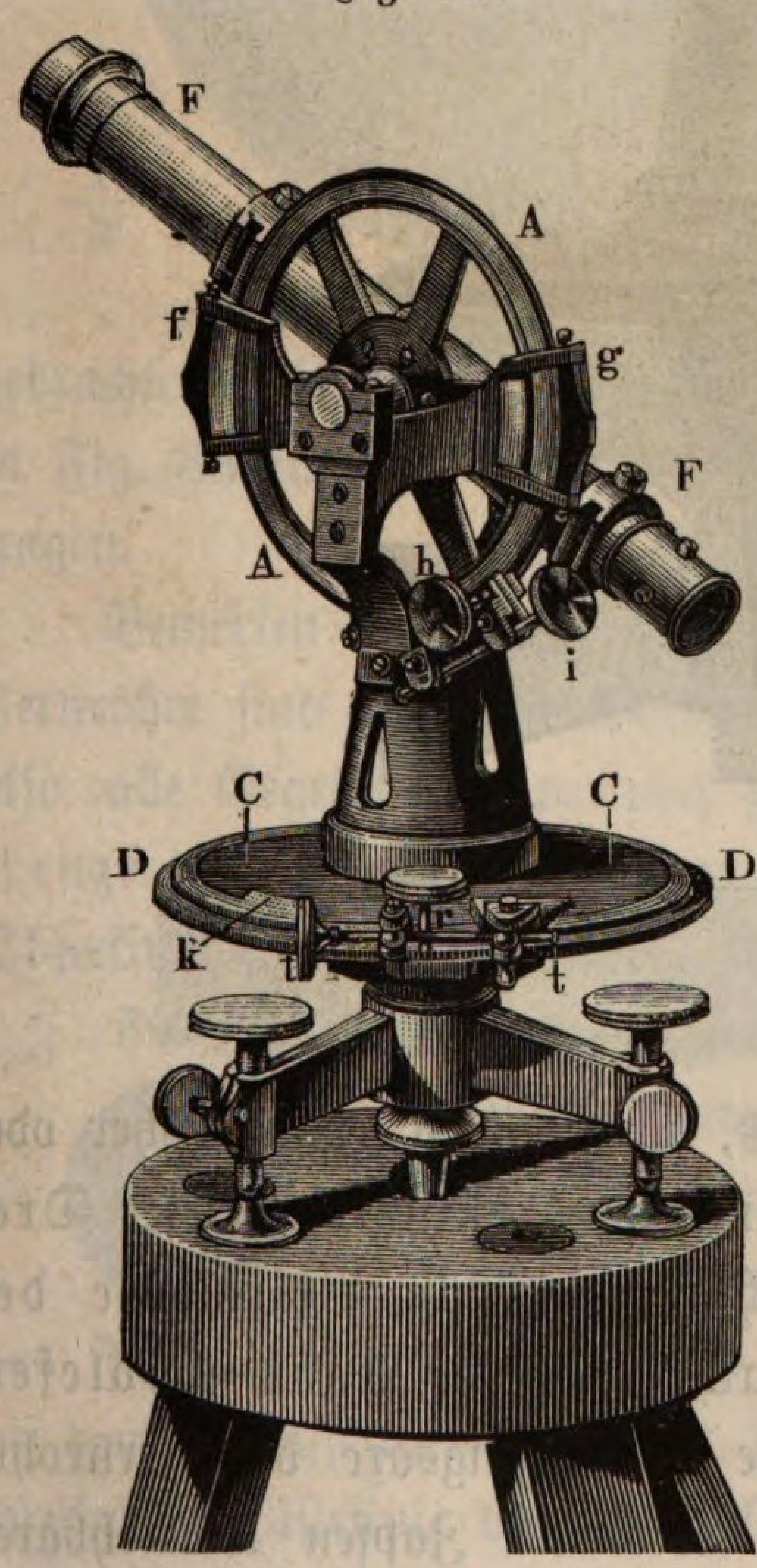


Nonius die Länge von 9 Zollen in 10 gleiche Theile getheilt ist, so daß man Zehntel-Zoll damit ablesen kann. Fig. 86 stellt ein solches in Holz ausgeführtes Modell in $^1/_{10}$ der natürlichen Größe dar. Der Nonius ist auf einem Schieber aufgetragen, welcher längs der Schiene hin und her geschoben werden kann, auf welcher die Haupttheilung angebracht ist. Schieber und Schiene hängen mittelst eines in einem Schlitz der Schiene verschiebbaren Stiftes zusammen, und es kann der Schieber mittelst der Schraubenmutter *n* an jeder beliebigen Stelle der Haupttheilung festgestellt werden. Die Art und Weise, wie beide Theile zusammenhängen, ist aus Fig. 87 ersichtlich.

Der Nonius wird bei Kreistheilungen noch häufiger angewandt als bei Längentheilungen. Nehmen wir an, auf der Haupttheilung sei der Grad noch in drei Theile getheilt, so ist der Bogen zwischen je zwei Theilstrichen der Haupttheilung gleich $^1/_3$ Grad = 20 Minuten. Wenn nun der Bogen von 19 Theilstrichen der Haupttheilung auf dem Nonius in 20 gleiche Theile getheilt ist, so ist eine Noniusabtheilung $^{19}/_{20}$ des Abstandes zweier aufeinander folgender Theilstriche der Haupttheilung, wenn also ein Theilstrich des Nonius mit einem Theilstrich der Haupttheilung zusammen trifft, so ist der nächste Strich des Nonius um $^1/_{20}$ von $^1/_3$ Grad, also um 1′ vom nächsten Strich der Haupttheilung entfernt; man kann also bei dieser Einrichtung mit Hülfe des Nonius bis auf 1 Minute genau ablesen. Das Verhältniß zwischen Nonius und Haupttheilung ist für verschiedene Instrumente nicht dasselbe.

Das Theodolit. In dem Folgenden wird vielfach von der Mes- 44
sung des Winkels die Rede sein, welchen zwei Visirlinien mit einander machen. Unter den verschiedenen zu diesem Zwecke dienenden Instrumenten ist jedenfalls das Theodolit das vollkommenste. Fig. 88 stellt ein Theodolit von möglichster Einfachheit in perspectivischer Ansicht, Fig. 89 (a. f. S.) stellt es in größerm Maaßstabe im Aufriß, und zwar zum Theil im Durchschnitt dar.

Fig. 88.

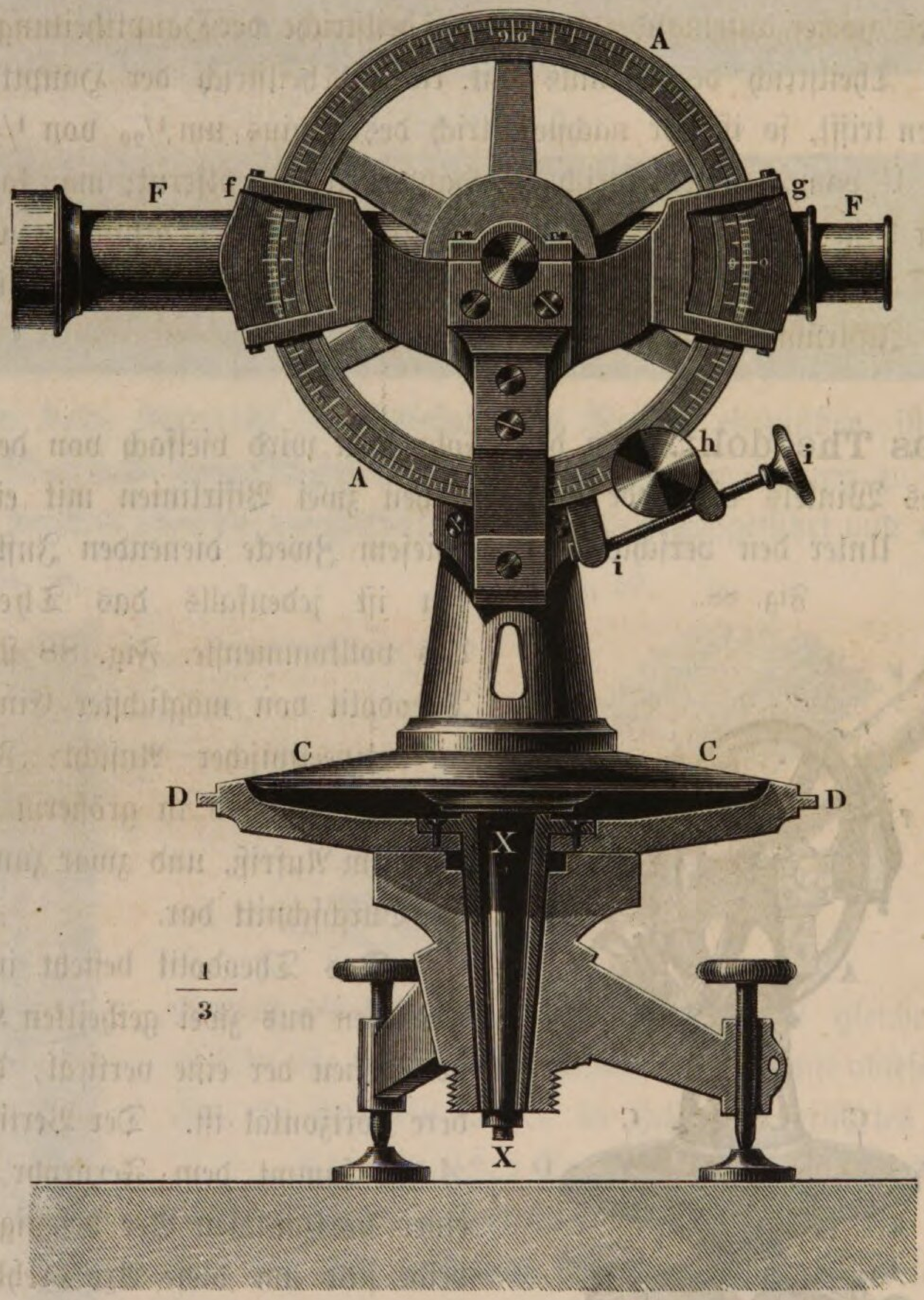


Das Theodolit besteht im Wesentlichen aus zwei getheilten Kreisen, von denen der eine vertical, der andere horizontal ist. Der Verticalkreis *A* ist sammt dem Fernrohr *F* an einer horizontalen Axe befestigt, und beide sind um diese Axe drehbar, so daß die gegenseitige Stellung des getheilten Verticalkreises und des Fernrohrs stets ungeändert bleibt.

Dieser getheilte Kreis *A* wird der Höhenkreis genannt, weil er dazu dient, Höhenwinkel zu messen.

Zu beiden Seiten des drehbaren Höhenkreises sind feste Nonien *f* und *g* angebracht. Wenn das Instrument gehörig aufgestellt und justirt ist, sollen die Nullpunkte der Nonien *f* und *g* auf die Punkte 0 und 180 der Theilung des Höhenkreises zeigen, sobald die Axe des Fernrohrs vollkommen wagerecht steht; dreht man dann das Fernrohr

Fig. 89.

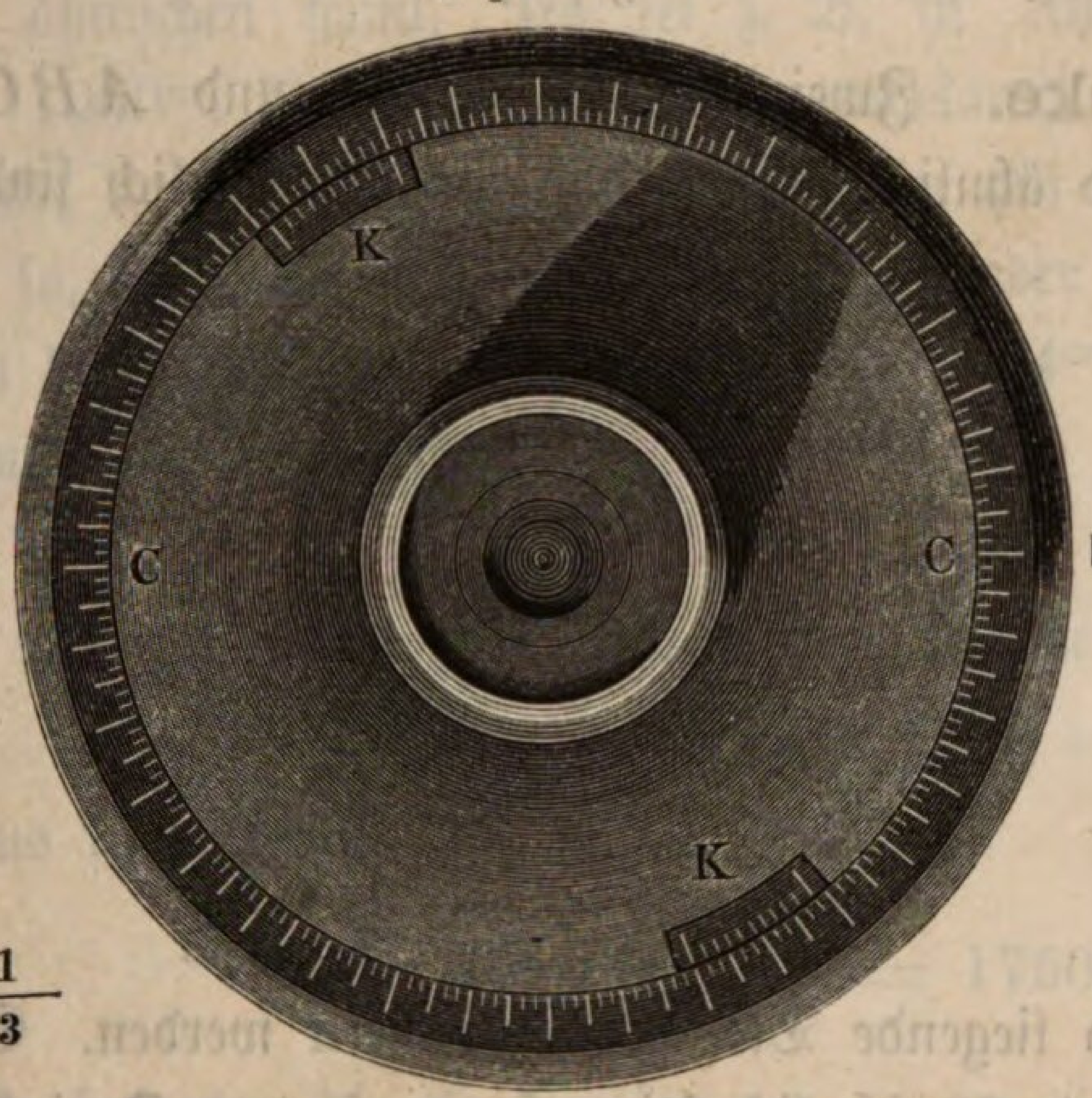


aus seiner horizontalen Richtung heraus, um es auf einen höher oder tiefer gelegenen Punkt zu richten, so kann man die Größe dieser Drehung, also auch den Winkel, welchen nun die Visirlinie des Fernrohrs mit der horizontalen macht, an den Nonien ablesen.

Das Gestell, welches die horizontale Umdrehungsaxe des Fernrohrs trägt, ist auf einer horizontalen, um den verticalen Zapfen *X* drehbaren

Scheibe *C* befestigt, welche der Horizontalkreis, der Alhidadenkreis oder die Alhidade genannt wird. Dieser Kreis dreht sich genau passend innerhalb eines mit dem Fußgestell des ganzen Apparates fest verbundenen, ringsum mit einer Gradtheilung versehenen kreisförmigen Ringes *D*, welcher der Limbus genannt wird. Die Alhidade trägt an ihrem äußern Rande zwei Nonien *K*, welche sich bei der Drehung der Alhidade längs der Theilung des Limbus hin bewegen, wie man deutlicher in Fig. 90 sieht, welche die Alhidade und den Limbus von oben gesehen darstellt, jedoch mit Weglassung der Stellschraube *r*, mittelst deren man die Alhidade an den Limbus anklemmen, und der Mikrometerschraube *t*, mittelst deren man eine feinere Verschiebung der Alhidade bewerkstelligen kann.

Fig. 90.



Um den Limbus und die Alhidade gehörig wagerecht zu stellen, was man an einer in der Mitte der Alhidade angebrachten Dosenlibelle erkennen kann, dienen drei Fußschrauben (von denen in Fig. 88 und 89 nur zwei sichtbar sind), welche das ganze Instrument tragen.

Bemerken wir noch, daß die Theodolitfernröhre stets astronomische Fernröhre sind (siehe Grundriß der Physik, 7. Auflage, S. 301), daß sie also alle Gegenstände verkehrt zeigen, und daß sie mit einem Fadenkreuze versehen sind. An der Stelle nämlich, an welcher das Bild des Objectivs zu Stande kommt, ist eine Blendung angebracht, über deren Oeffnung zwei sehr feine Fäden (in der Regel Spinnenfäden) unter rechtem Winkel sich kreuzend ausgespannt sind (Fig. 91). Will man einen bestimmten Gegenstand, etwa eine Thurmspitze, einvisiren, so richtet man das Fernrohr so, daß das Bild des zu beobachtenden Gegenstandes genau in den Durchschnittspunkt der Fäden fällt. Man sieht, daß auf diese Weise die Visirlinie des Fernrohrs vollkommen genau bestimmt ist.

Fig. 91.



Mit Hülfe des Alhidadenkreises und seines Limbus wird der Winkel gemessen, welchen die Horizontalprojectionen zweier beliebigen Visirlinien mit einander machen. Will man z. B. den Winkel messen, welchen die Horizontalprojectionen der vom Beobachtungsorte nach einem Gegenstande R gerichteten Visirlinie macht mit der Horizontalprojection der nach L gerichteten Visirlinie, so richtet man das Fernrohr zunächst auf den Gegenstand R und liest den Nonius des Horizontalkreises ab; sodann richtet man das Fernrohr nach L und liest den Nonius abermals ab. Die Differenz der beiden Ablesungen ist alsdann der gesuchte Winkel.

45 **Aehnliche Vielecke.** Zwei Vielecke $abcde$ und $ABCDE$ (Fig. 92 und Fig. 93) sind ähnlich, wenn alle Dreiecke ähnlich sind, in

Fig. 92.

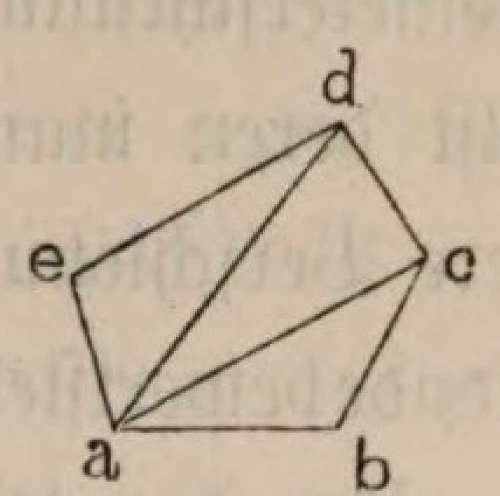
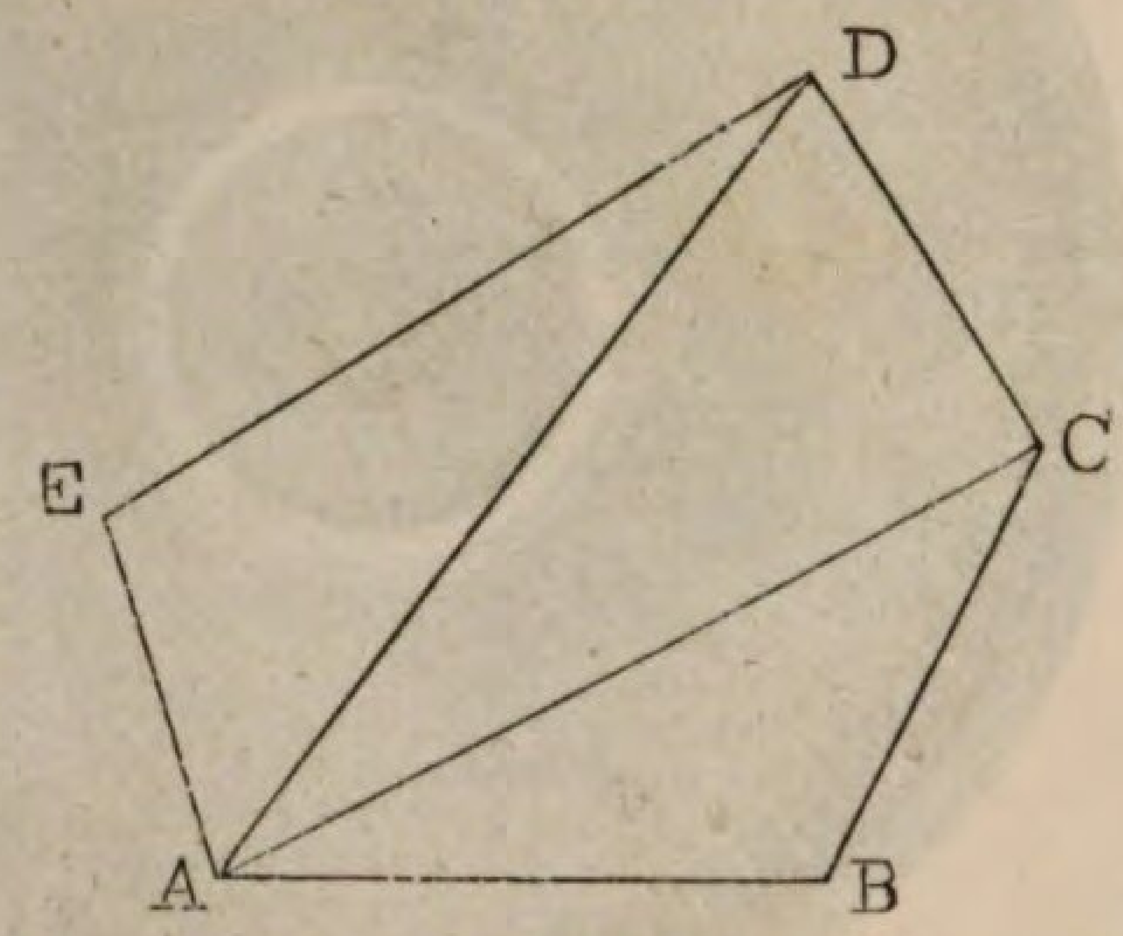


Fig. 93.



welche sie durch entsprechend liegende Diagonalen getheilt werden. Sollen die Fünfecke in Fig. 92 und 93 ähnlich sein, so muß das Dreieck abc dem Dreieck ABC, ferner acd dem Dreieck ACD, und endlich ade dem Dreieck ADE ähnlich sein. In diesem Falle aber hat man

$$ac : AC = dc : DC$$
$$ac : AC = cb : CB$$
$$ac : AC = ab : AB$$

woraus folgt

$$dc : DC = cb : CB = ab : AB$$

ebenso läßt sich auch zeigen, daß die Seiten de und ea zu den Seiten DE und EA in demselben Verhältnisse stehen.

Wenn also zwei Vielecke einander ähnlich sind, so sind die entsprechenden Seiten proportional, d. h. alle Seiten des einen Vielecks stehen in gleichem Verhältniß zu den entsprechenden Seiten des andern. Ist z. B. eine Seite des kleinern $1/9$ der entsprechenden Seite im großen, so stehen alle Seiten des kleinen zu den entsprechenden Seiten des großen in dem Verhältniß von 1 : 9. Steht eine Seite des kleinen

zu der entsprechenden im großen in dem Verhältniß von 2 : 7, so sind alle Seiten des kleinen $^2/_7$ der entsprechenden Seiten des andern Vielecks. Daraus folgt nun auch, daß je zwei Seiten des kleinen unter sich in demselben Verhältniß stehen, wie die beiden entsprechenden Seiten des großen Vielecks.

Berechnung der Dreiecksseiten. Die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke liefert ein Mittel, zwei Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn man nur eine Seite desselben und die drei Seiten eines ähnlichen kennt. Es sei z. B. in einem Dreieck die eine Seite $\mathfrak{a} = 1000^m$, die Seiten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ unbekannt. Die Seiten eines andern Dreiecks, welches diesem ähnlich ist, seien mit *a*, *b* und *c* bezeichnet, und zwar so, daß die entsprechenden Seiten beider Dreiecke mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind. Es sei nun $a = 4^{cm}$, $b = 7^{cm}$, $c = 5^{cm}$, so hat man die Proportionen 46

$$a : b = \mathfrak{a} : \mathfrak{b},$$

oder, wenn man für *a*, *b* und $\mathfrak{a}$ ihre Werthe setzt,

$$4 : 7 = 1000 : \mathfrak{b},$$

woraus sich ergiebt

$$\mathfrak{b} = \frac{7000}{4} = 1750.$$

Ebenso hat man die Proportion

$$a : c = \mathfrak{a} : \mathfrak{c},$$

also

$$4 : 5 = 1000 : \mathfrak{c},$$

woraus sich ergiebt

$$\mathfrak{c} = \frac{5000}{4} = 1250'.$$

Kennt man demnach in einem Dreiecke nur eine Seite und zwei Winkel, so kann man die Länge der beiden anderen Seiten durch Rechnung finden, ohne sie direct zu messen; denn da man zwei Winkel des Dreiecks kennt, so kann man ein ähnliches auf dem Papiere construiren, die Seiten desselben messen, und dann auf die eben angegebene Weise die nöthigen Proportionen ansetzen.

Zur Uebung mögen einige Beispiele dienen. Wie groß sind in folgenden sechs Dreiecken die Seiten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$?

a	B	C	a	B	C
4524′	60°	30°	748m	53°	68°
548′	115°	42°	93m	122°	31°
12429′	25°	124°	6728m	21°	82°

a bezeichnet hier, wie früher, die Grundlinie eines Dreiecks, während mit *B* und *C* die Winkel zur rechten und linken derselben bezeichnet sind.

In der oben angegebenen Weise bedient man sich der Aehnlichkeit der Dreiecke, um Längen zu berechnen, deren directe Messung unmöglich ist, wie dies noch durch die folgenden Aufgaben näher erläutert werden soll.

Aufgabe. Die Höhe eines Thurmes, eines Baumes u. s. w. zu bestimmen, ohne den Gipfel zu ersteigen.

Auflösung. Wir nehmen an, daß der Gegenstand, dessen Höhe bestimmt werden soll, auf einer wagerechten Ebene stehe, und daß man

Fig. 94.

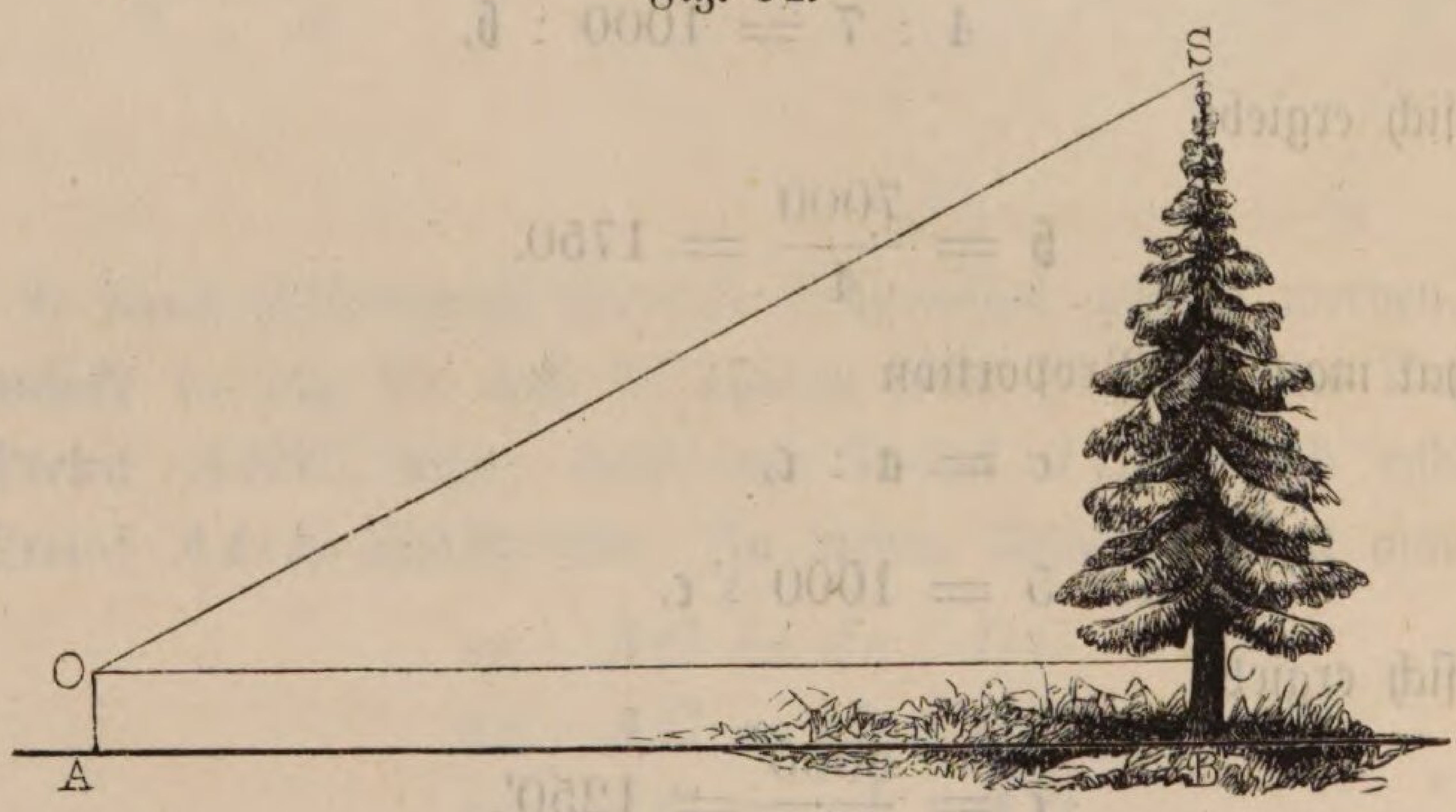
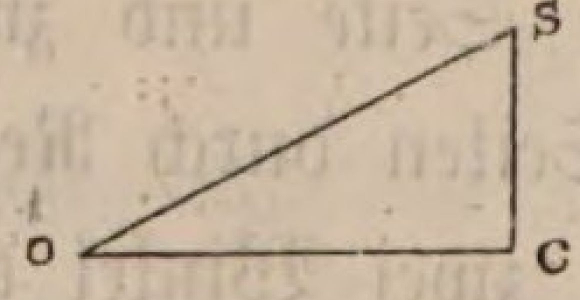


Fig. 95.



die Entfernung irgend eines Punktes *A* (Fig. 94) in der horizontalen Ebene von dem Punkte *B* bestimmen könne, der senkrecht unter dem Gipfel *S* liegt. Diese Entfernung *AB* sei z. B. 500′. Nun stelle man sich in *A* auf, und messe den Winkel, den die durch das Auge des Beobachters nach dem Gipfel des Baumes gehende gerade Linie *OS* mit der durch das Auge gelegten horizontalen Linie *OC* macht; dieser Winkel sei 15° (wie solche Winkelmessungen auszuführen sind, ist im Paragraph 44 erläutert worden). Nun kann man leicht auf dem Papiere ein Dreieck *ocs*, Fig. 95, construiren, welches dem Dreieck *OCS*

ähnlich ist. Die Grundlinie oc dieses Dreiecks ist vollkommen willkürlich, man mache sie z. B. 3″. Bei c setze man einen rechten Winkel an, bei o einen Winkel von 15°, so wird das Dreieck ocs dem Dreieck OCS ähnlich sein, wir haben also die Proportion

$$oc : cs = OC : CS.$$

Da man die Länge cs auf dem Papiere messen kann, so ist in dieser Proportion nur noch CS unbekannt, und kann also leicht berechnet werden. Zu CS hat man dann noch die Höhe AO hinzuzufügen, um die Höhe des Baumes zu erhalten. Man führe die hier angedeutete Zeichnung und Rechnung aus.

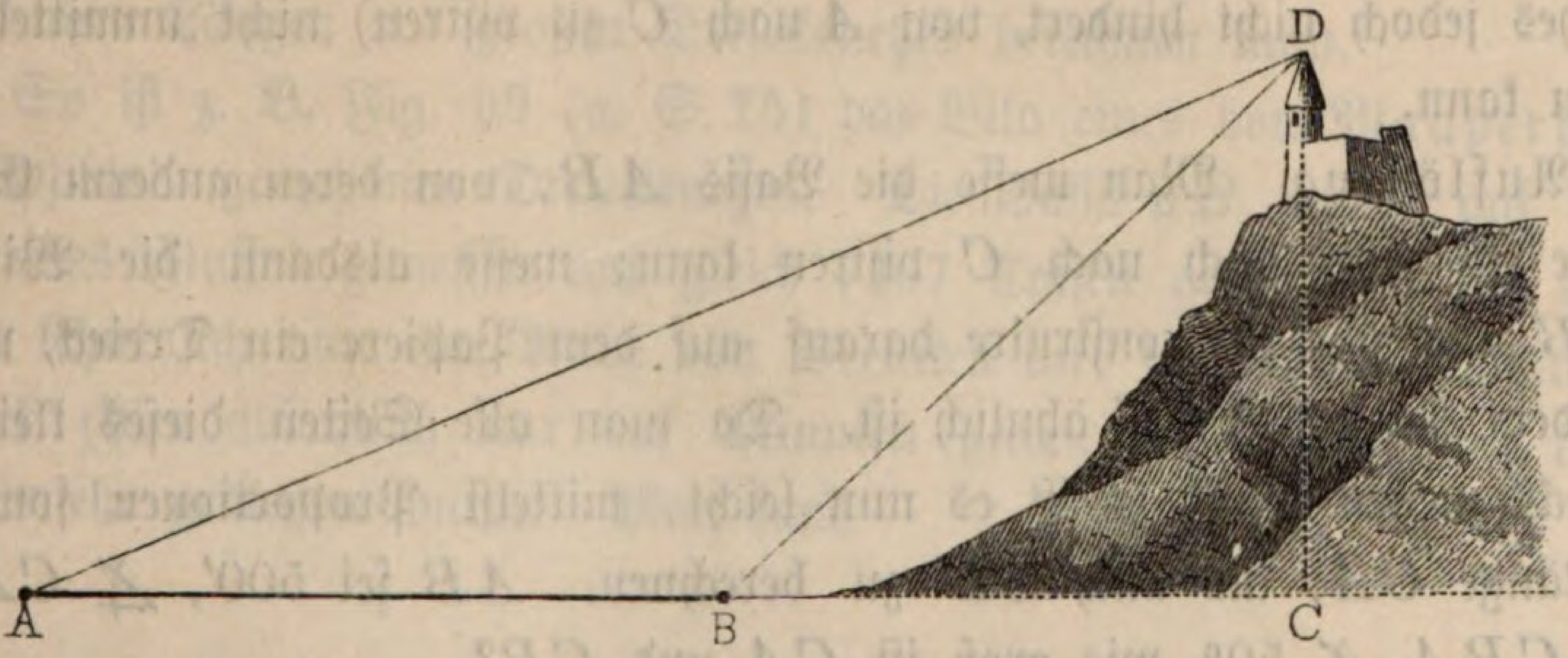
Diese Aufgabe läßt sich auch ohne Winkelmessung durch die Messung der Länge des Schattens lösen. Gesetzt den Fall, der Schatten des Baumes sei 132′ lang; ein Stab von 4′ Höhe werfe gleichzeitig einen Schatten von 7′, so kann man die Höhe des Baumes berechnen, weil sich der Stabschatten zum Baumschatten verhält, wie die Stabhöhe zur Baumhöhe, also

$$7 : 132 = 4 : x.$$

Aufgabe. Die Höhe eines Berges zu berechnen.

Auflösung. Diese Aufgabe läßt sich nicht wie die vorige auflösen, weil man nicht bis zu dem Punkte C (Fig. 96) der horizontalen Ebene

Fig. 96.

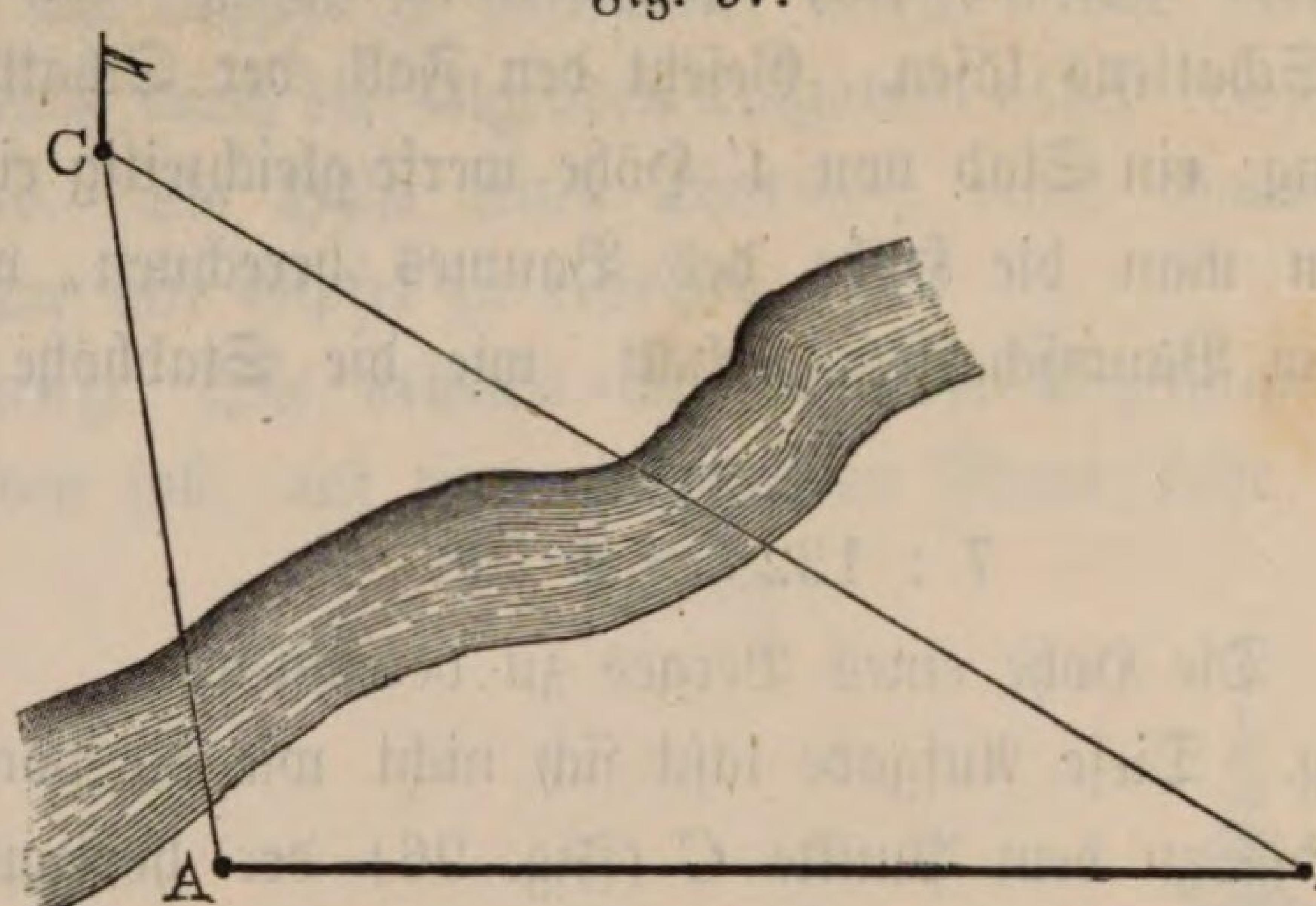


messen kann, der vertical unter dem Gipfelpunkt D des Berges liegt. Um die Aufgabe zu lösen, messe man eine Linie AB (Basis), welche in der horizontalen Ebene liegt, auf welcher sich der Berg erhebt, und welche mit D in einer Verticalebene liegt, so also, daß die Verlängerung von AB durch die Horizontalprojection des Gipfelpunktes D geht, welche wir mit C bezeichnen wollen. Darauf messe man die Winkel, welche die Visirlinien AD und BD mit der horizontalen AC machen. Nachdem

diese Winkel gemessen sind, ist es leicht, auf dem Papiere ein Dreieck zu construiren, welches dem Dreieck ABD ähnlich ist; ist dies geschehen, so verlängere man die Grundlinie und fälle vom Gipfel des Dreiecks auf diese Verlängerung ein Perpendikel, so entspricht dieses der Höhe des Berges. Da man nun alle Linien auf dem Papiere messen kann, so ist es leicht, die Höhe durch Proportionen zu berechnen. Gesetzt den Fall, man habe gefunden $AB = 3000'$, $\measuredangle DBC = 18^0$, $\measuredangle DAC = 10^0$, wie hoch ist der Berg?

Aufgabe. Die Entfernung zweier Orte A und C (Fig. 97) zu bestimmen, die man wegen eines zwischen beiden gelegenen Hindernisses

Fig. 97.



(welches jedoch nicht hindert, von A nach C zu visiren) nicht unmittelbar messen kann.

Auflösung. Man messe die Basis AB, von deren anderm Endpunkte B man auch nach C visiren kann; messe alsdann die Winkel CAB und CBA, construire darauf auf dem Papiere ein Dreieck, welches dem Dreieck ABC ähnlich ist. Da man alle Seiten dieses kleinen Dreiecks messen kann, so ist es nun leicht, mittelst Proportionen sowohl die Länge CA, als auch CB zu berechnen. AB sei $500'$, $\measuredangle\ CAB$ 80^0, $CBA \measuredangle\ 50^0$, wie groß ist CA und CB?

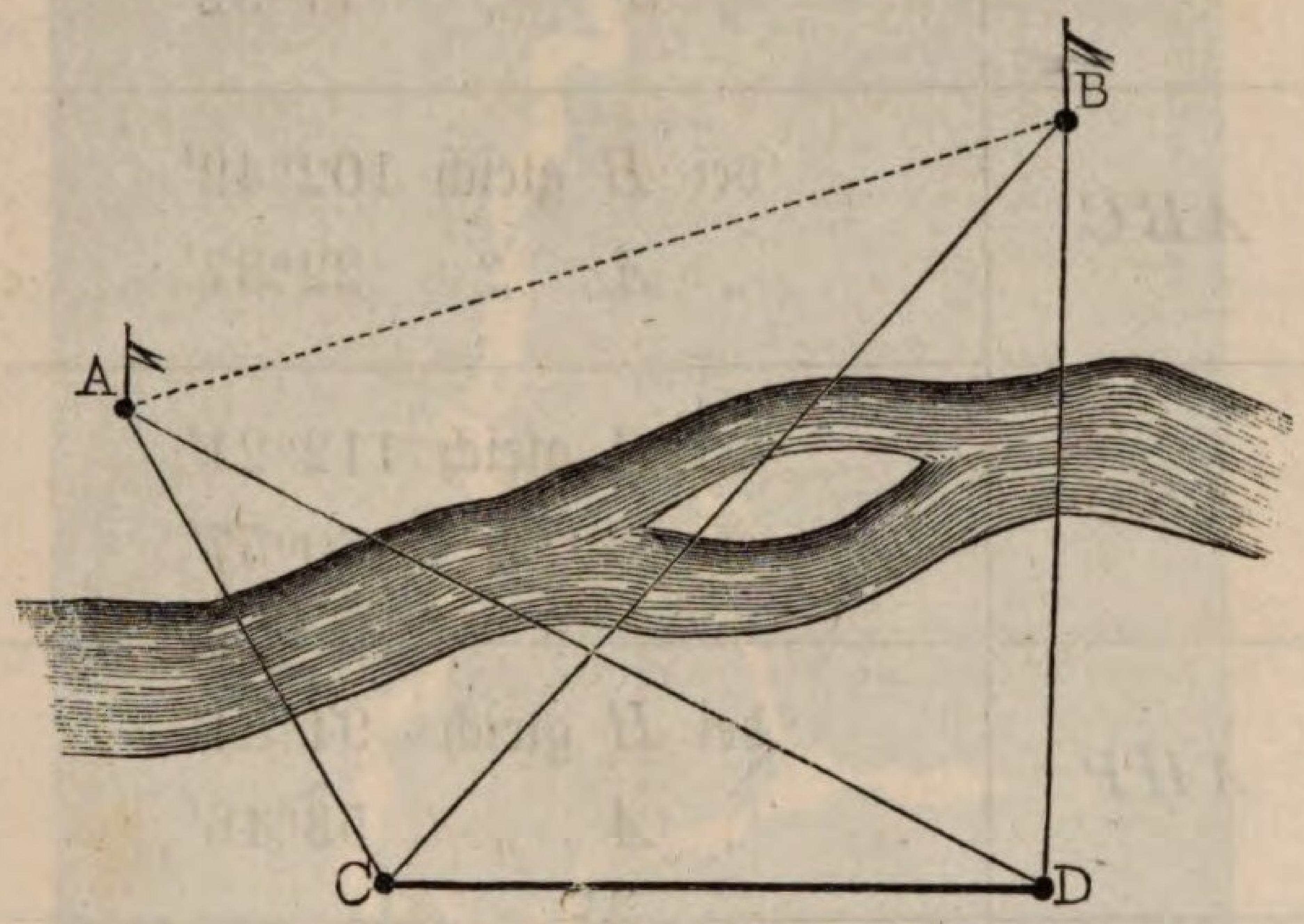
Aufgabe. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Fig. 98) zu bestimmen, wenn man weder zu dem einen noch zu dem andern hingehen kann.

Auflösung. Man messe eine Basis CD, von deren Endpunkten aus man nach A und B visiren kann. Man messe alsdann die Winkel CDA, CDB, ACD und BCD, und construire nach diesen Winkeln eine Figur, welche der Figur $BDCA$ ähnlich ist. Hat man die nö=

thigen Linien dieser construirten Figur gemessen, so kann man leicht BA berechnen.

Bei Vermessung größerer Länderstrecken denkt man sich eine Reihe ausgezeichneter Punkte durch Visirlinien verbunden und so das ganze Land

Fig. 98.



mit einem Dreiecksnetz bedeckt. Wenn man nun von diesem ganzen Dreiecksnetz nur eine einzige Linie (die Basis), außerdem aber die sämmtlichen Winkel der einzelnen Dreiecke gemessen hat, so kann man eine dem großen Dreiecksnetze ähnliche Figur auf dem Papiere entwerfen, in welcher man dann leicht alle Seiten messen und mit Hülfe derselben alsdann die entsprechenden Längen des großen Dreiecksnetzes berechnen kann.

So ist z. B. Fig. 99 (a. S. 75) das Bild eines von Maupertuis in Lappland gemessenen Dreiecksnetzes. Die Basis bB wurde auf dem Eise eines Flusses gemessen und gleich 7407 Toisen gefunden. An diese Basis lehnt sich nun eine Reihe von Dreiecken an, in welchen sämmtliche Winkel (hier absichtlich nur auf Minuten genau angegeben), aber keine Seite mehr gemessen wurde. Man fand

im Dreieck	den Winkel
BbA	bei *B* gleich 9°30′ „ *b* „ 77°32′
ABC	bei *B* gleich 102°42′ „ *A* „ 22°37′
AHC	bei *A* gleich 112°21′ „ *C* „ 30°57′
AHP	bei *H* gleich 94°54′ „ *A* „ 53°46′
PHN	bei *P* gleich 37°22′ „ *H* „ 49°13′
PNO	bei *P* gleich 87°52′ „ *N* „ 51°53′
HCK	bei *C* gleich 100°10′ „ *H* „ 36° 5′
CKT	bei *C* gleich 37° 9′ „ *K* „ 118°28′

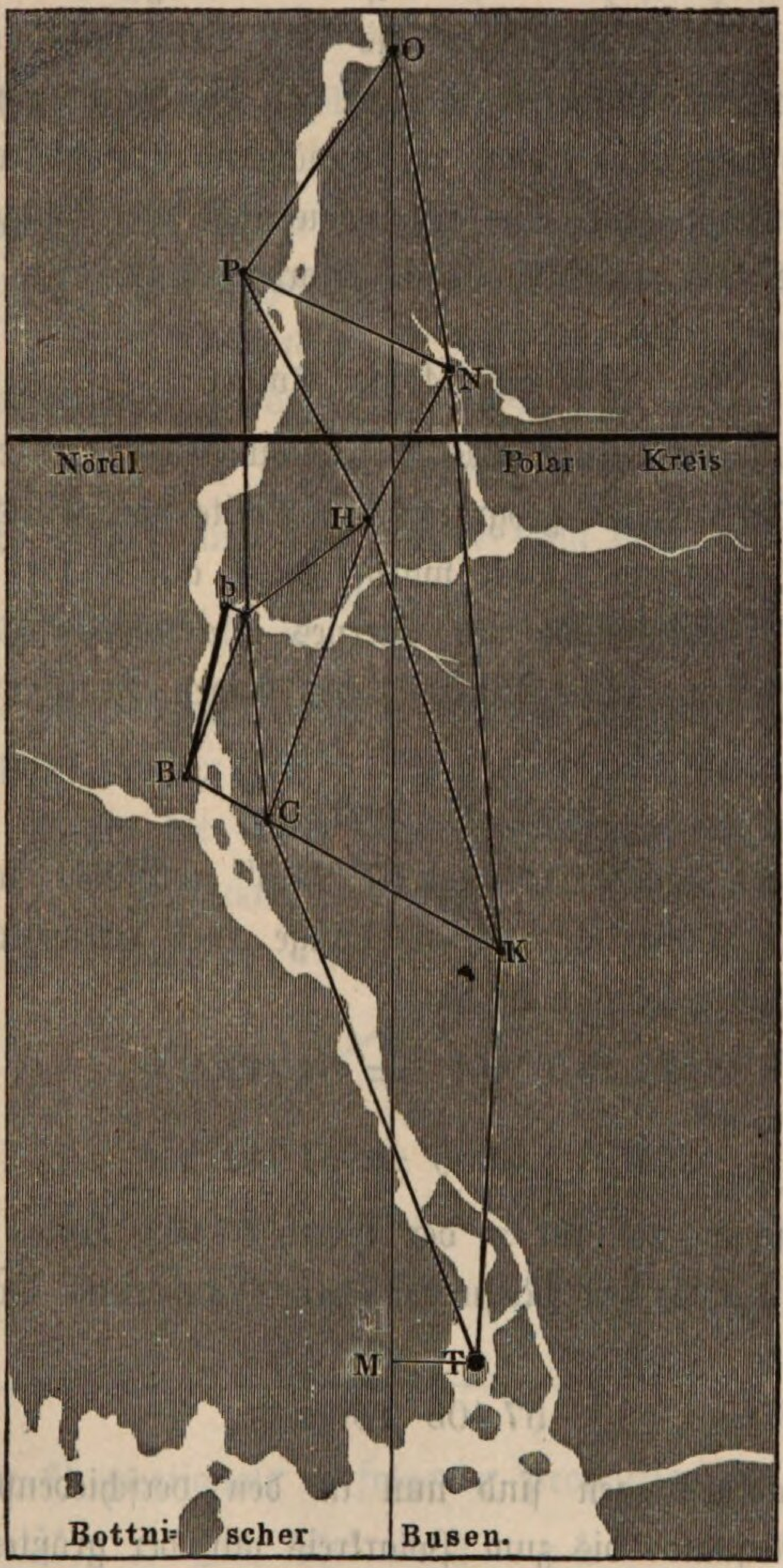
NB. *A* fehlt in der Figur; der aufmerksame Leser wird aber leicht finden, wo es hingehört.

Diese Data reichen hin, um eine dem wirklichen Dreiecksnetze ähnliche Figur zu zeichnen, in welcher man alle Längen messen und dann die entsprechenden Entfernungen des großen Dreiecksnetzes berechnen kann.

Der nördlichste Punkt *O* dieses Dreiecksnetzes, Kittis, und der südlichste *T*, die Thurmspitze von Tornea, liegen nicht auf demselben Me-

ridian. Eine in O angestellte Messung ergab, daß die Visirlinie OP einen Winkel von $28^{0}52'$ mit dem Meridian von Kittis macht, den man nach dieser Angabe auf der verkleinerten Zeichnung des Dreiecksnetzes leicht ziehen, und auf ihn das Perpendikel TM fällen kann.

Fig. 99.



Führt man die Zeichnung in etwas großem Maaßstabe aus, indem man etwa bB gleich 3 oder 4 Centimetern macht (beim Auftragen der Winkel mit dem Transporteur kann man natürlich die einzelnen Minuten nicht genau, sondern nur nach ohngefährer Schätzung auftragen), so wird man für die Länge OM ohngefähr den Werth von 54940 Toisen finden.

46a **Die Gradmessungen und die Bestimmung des Meters.** Die letzte Aufgabe des vorigen Paragraphen hat vorzugsweise den Zweck, die Methode der Gradmessungen und die darauf sich stützende Bestimmung des Meters verständlich zu machen. Da man in der Zeichnung die Winkel nicht einmal auf Minuten genau auftragen kann, während doch die Winkelmessungen bis auf Bruchtheile von Secunden genau ausgeführt sein müssen, so ist klar, daß die Bestimmung der Länge OM durch Zeichnung nicht einmal mit annähernd brauchbarer Genauigkeit bestimmt werden kann, daß eine trigonometrische Berechnung der Seiten des Dreiecksnetzes und der Länge QM erforderlich ist. Auf diesem Wege ergab sich

$$OM = 54\,942 \text{ Toisen.}$$

Nachdem nun die Länge des Meridianbogens OM ermittelt war, blieb noch die Differenz der geographischen Breite von Kittis und Tornea zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wurde zuerst auf Kittis und nachher zu Tornea die Zenithdistanz des Sternes *δ draconis* zur Zeit seiner Culmination gemessen. Die Differenz der beiden Zenithdistanzen ergab sich gleich

$$0^0\ 57'\ 25{,}5''$$

woraus sich ergiebt, daß Kittis um 57′ 25,5″ nördlicher liegt als Tornea. Nach diesen Daten läßt sich die Länge eines Breitegrades in Lappland leicht bestimmen, denn man hat

$$57'\ 25{,}5'' : 1^0 = 54\,942 : x$$

oder

$$3445{,}5 : 3600 = 54\,942 : x$$

aus welcher Gleichung sich für x der Werth 57405 Toisen ergiebt. In Lappland ist also nach den Messungen von Maupertuis die Länge eines Breitegrades

$$57\,405 \text{ Toisen.}$$

Solche Gradmessungen sind nun in den verschiedensten Gegenden der Erde vom Aequator bis zum Polarkreis mit der größten Genauigkeit ausgeführt worden, und aus ihrer Zusammenstellung hat sich dann ergeben, daß die Länge des Bogens von einem Punkt des Aequators bis zu einem Pol

$$5\,130\,074 \text{ Toisen}$$

lang ist. Somit war nun zunächst die Länge der Toise festgestellt. Da

nun aber die neue Längeneinheit, das Meter, als der zehnmillionste Theil des Erdmeridianquadranten definirt wurde, so sind also

$$10\,000\,000 \text{ Meter} = 5\,130\,074 \text{ Toisen},$$
$$1 \text{ Meter} = 0{,}513\,0074 \text{ Toisen},$$
$$1 \text{ Meter} = 3'\ 0''\ 11{,}296'' \text{ altfranzösisches Maaß}.$$

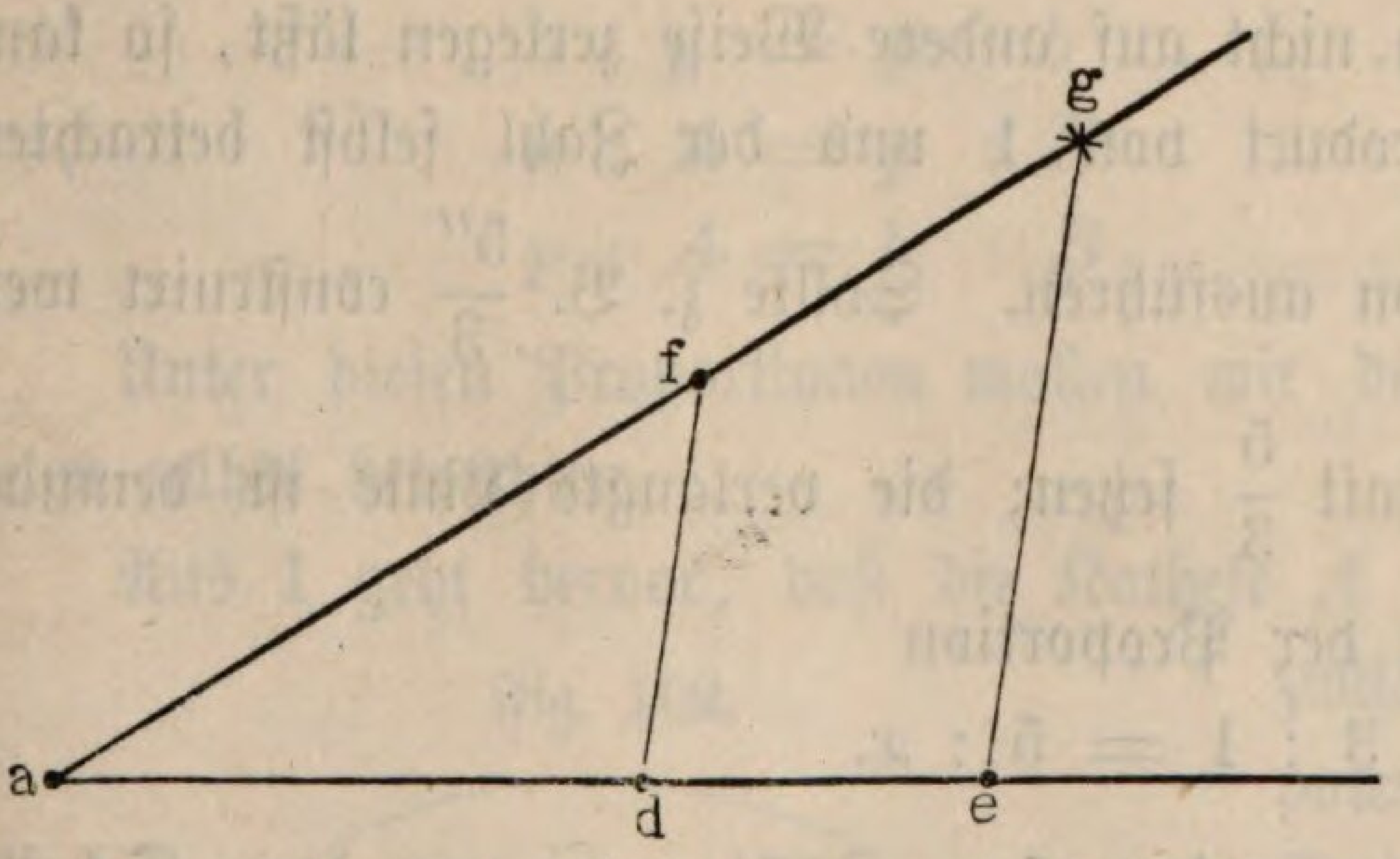
Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien eine vierte Proportionale zu construiren. 47

Auflösung. Die Länge der drei gegebenen Linien sei mit m, n und o bezeichnet, so ist die gesuchte vierte Proportionale eine Linie, deren Länge sich zu o verhält wie n zu m, also eine Linie, deren Länge durch die vierte Proportionale in der Proportion

$$m : n = o : x$$

dargestellt wird. Die Länge dieser Linie kann man durch Rechnung aus dieser Proportion finden, sie ist $\frac{n \times o}{m}$; unsere Aufgabe verlangt aber, daß die Länge dieser Linie construirt, nicht berechnet werde. Diese Aufgabe wird folgendermaßen gelöst. Man ziehe zwei Linien (Fig. 100) von unbestimmter Länge, die einen beliebigen Winkel mit einander machen, mache auf diesen Linien $ad = m$, $ae = n$, $af = o$, ziehe fd und mit fd parallel eg, so ist ag die verlangte vierte Proportionale, denn die Dreiecke afd und age sind ähnlich, und demnach ist

Fig. 100.



$$ad : ae = af : ag.$$

Zur Uebung construire man die vierte Proportionale in folgende Proportionen:

$$2'' : 3'' = 3'' : x$$
$$3'' : 4'' = 5'' : x$$
$$9^{cm} : 6^{cm} = 11{,}7^{cm} : x$$
$$60^{mm} : 45^{mm} = 96^{mm} : x$$

Ein jeder Bruch von der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ stellt uns die vierte Propor-

tionale zu den drei Größen c, a und b dar, denn wenn man in der Proportion

$$c : a = b : x$$

den Werth von x berechnet, so findet man ihn $\frac{a \cdot b}{c}$. Man kann demnach den Werth des Bruches $\frac{a \cdot b}{c}$ construiren, indem man auf die eben angegebene Weise die vierte Proportionale zu den drei Größen c, a und b construirt. Sollte z. B. $\frac{2 \cdot 3''}{5}$ construirt werden, so hätte man nur die vierte Proportionale in der Proportion

$$5'' : 2'' = 3'' : x$$

zu construiren.

Um $\frac{8''}{5}$ zu construiren, braucht man nur den Zähler in zwei Factoren, z. B. in 2 und 4 zu zerlegen, und alsdann die vierte Proportionale der Proportion

$$5 : 2 = 4 : x$$

zu construiren.

Zur Uebung construire man $\frac{4{,}8''}{3}$ $\frac{7{,}2''}{5}$ $\frac{2{,}8''}{1{,}3}$ $\frac{3{,}6''}{2{,}5}$ u. s. w.

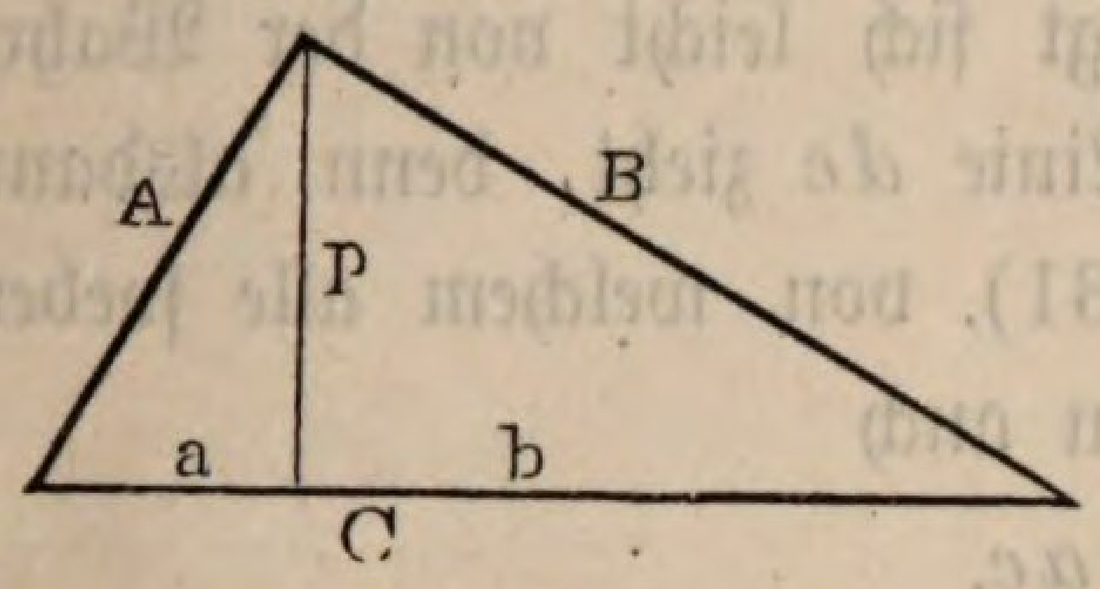
Wenn der Zähler sich nicht auf andere Weise zerlegen läßt, so kann man ihn doch als ein Product von 1 und der Zahl selbst betrachten, und danach die Construction ausführen. Sollte z. B. $\frac{5''}{3}$ construirt werden, so kann man $\frac{1 \cdot 5}{3}$ statt $\frac{5}{3}$ setzen; die verlangte Linie ist demnach die vierte Proportionale in der Proportion

$$3 : 1 = 5 : x.$$

48 **Die mittlere Proportionale.** Fällt man von dem Scheitel des rechten Winkels in einem rechtwinkeligen Dreieck ein Perpendikel auf die Hypotenuse (mit dem Namen der Hypotenuse bezeichnet man diejenige Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, während die beiden anderen Seiten Katheten genannt werden), so wird das Dreieck dadurch in zwei andere getheilt, welche sowohl unter sich, als auch dem ganzen ähnlich sind. In Fig. 101 ist die Hypotenuse mit C bezeichnet, die Katheten mit A und B, das auf

die Hypotenuse gefällte Perpendikel mit p. Dieses Perpendikel theilt die Hypotenuse in zwei Theile a und b. Es ist nun leicht zu zeigen,

Fig. 101.



daß das Theildreieck apA zwei Winkel enthält, welche den entsprechenden Winkeln des Dreiecks ABC gleich sind, woraus dann die Aehnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt. Eben so läßt sich auch die Aehnlichkeit der Dreiecke bBp und ABC nachweisen. Da aber jedes der beiden Theildreiecke dem ganzen ähnlich ist, so sind sie auch unter einander ähnlich.

Aus der Aehnlichkeit des Theildreiecks aAp und des ganzen ergeben sich folgende Proportionen:

$$a : A = A : C \quad . \; . \; . \; . \; 1$$
$$a : p = A : B \quad . \; . \; . \; . \; 2$$
$$p : A = B : C \quad . \; . \; . \; . \; 3$$

Aus der Aehnlichkeit des andern Theildreiecks mit dem ganzen:

$$b : B = B : C \quad . \; . \; . \; . \; 4$$
$$b : p = B : A \quad . \; . \; . \; . \; 5$$
$$p : B = A : C \quad . \; . \; . \; . \; 6$$

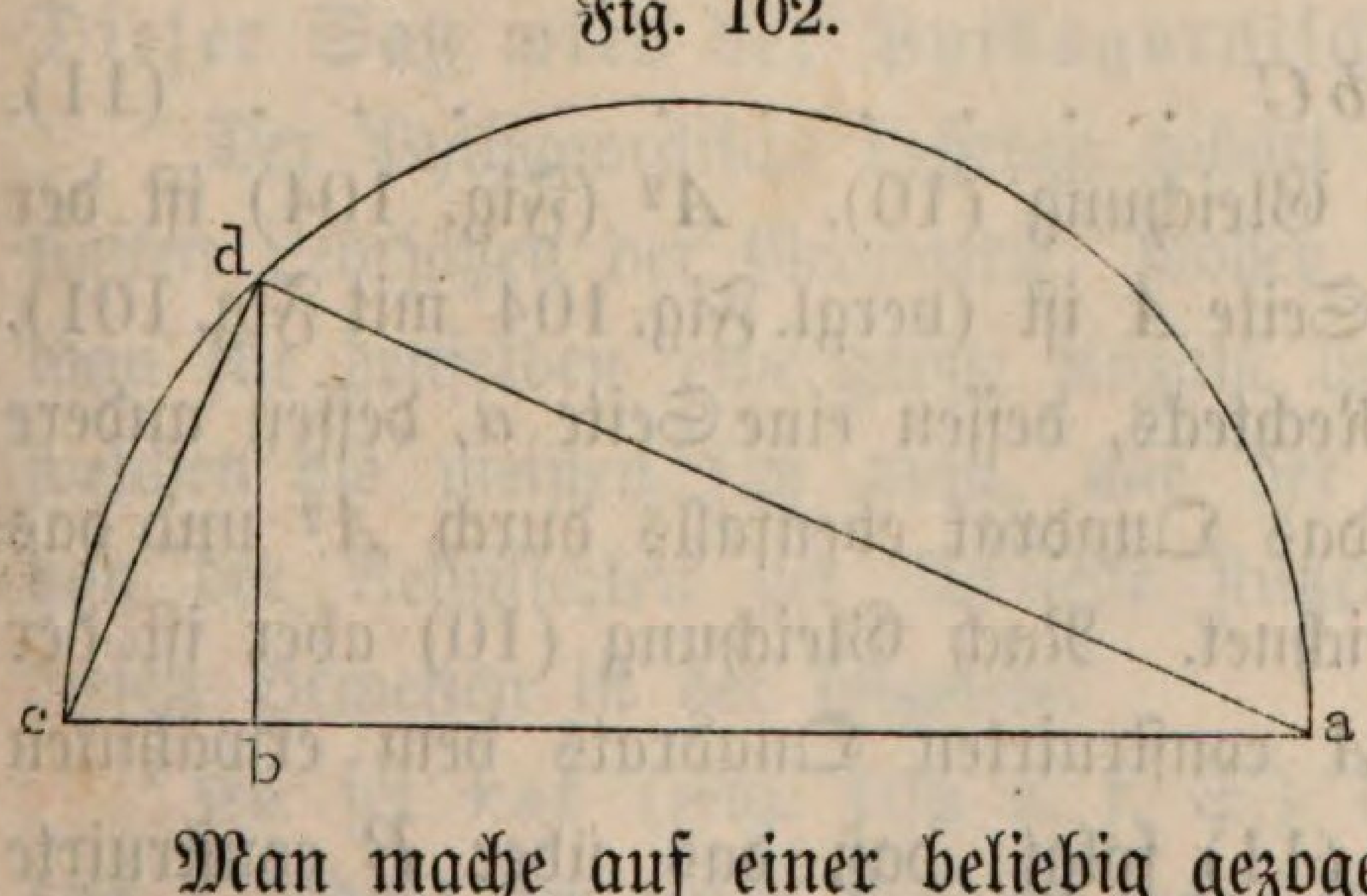
Aus der Vergleichung der beiden Theildreiecke unter einander:

$$a : p = p : b \quad . \; . \; . \; . \; 7$$
$$a : A = p : B \quad . \; . \; . \; . \; 8$$
$$p : A = b : B \quad . \; . \; . \; . \; 9$$

Unter diesen Proportionen wollen wir die mit 1, 4 und 7 bezeichneten näher betrachten.

Aus 1 geht hervor, daß die Kathete A die mittlere Proportionale

Fig. 102.



zwischen a und der ganzen Hypotenuse ist; aus 4 folgt, daß B die mittlere Proportionale zwischen b und C ist. Darauf gründet sich nun ein Verfahren, eine Linie zu construiren, welche die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Linien ist.

Man mache auf einer beliebig gezogenen Linie ab (Fig. 102) gleich der kleinern und ac gleich der größern der beiden gegebenen Linien; ziehe

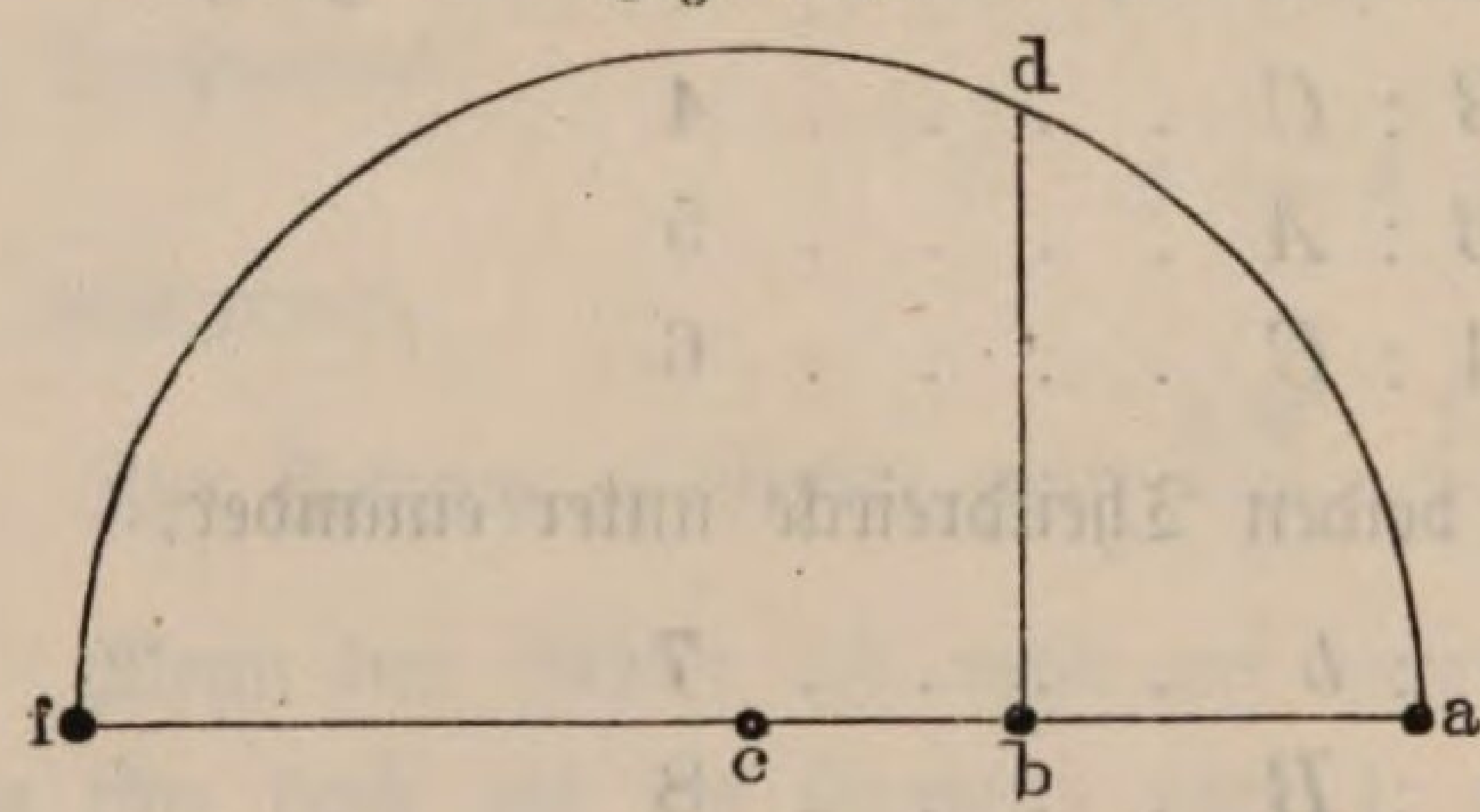
alsdann über ac als Durchmesser einen Halbkreis. Dieser Halbkreis wird von dem in b errichteten Perpendikel in einem Punkte d getroffen. Zieht man von d nach a eine Linie, so ist dies die verlangte mittlere Proportionale zwischen ab und ac. Man überzeugt sich leicht von der Wahrheit dieser Aussage, wenn man noch die Linie dc zieht, denn alsdann entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck adc (§. 31), von welchem alle soeben gemachten Behauptungen gelten, wonach denn auch

$$ab : ad = ad : ac.$$

Man construire die mittlere Proportionale zwischen 2″ und 3″, zwischen 6^{cm} und 14^{cm}, zwischen 4^{cm} und 11^{cm}.

Aus der Gleichung 7 folgt, daß das Perpendikel p Fig. 101 die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken ist, in welche die Hypotenuse durch dasselbe getheilt wird. Daraus nun läßt sich eine zweite Methode ableiten, zwischen zwei gegebenen Linien eine mittlere Proportionale zu construiren. Man mache fb (Fig. 103) gleich der einen, ba gleich der andern der beiden gegebenen Linien, so also, daß fa ihrer Summe gleich ist, construire alsdann über fa als Durchmesser einen Halbkreis; das in b errichtete Perpendikel bd ist die verlangte mittlere Proportionale. Es ist leicht, die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen.

Fig. 103.



49 **Der pythagoräische Lehrsatz.** Aus den Gleichungen (1) und (4) lassen sich jedoch noch weit wichtigere Folgerungen ziehen. Aus (1) folgt

$$A^2 = aC \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

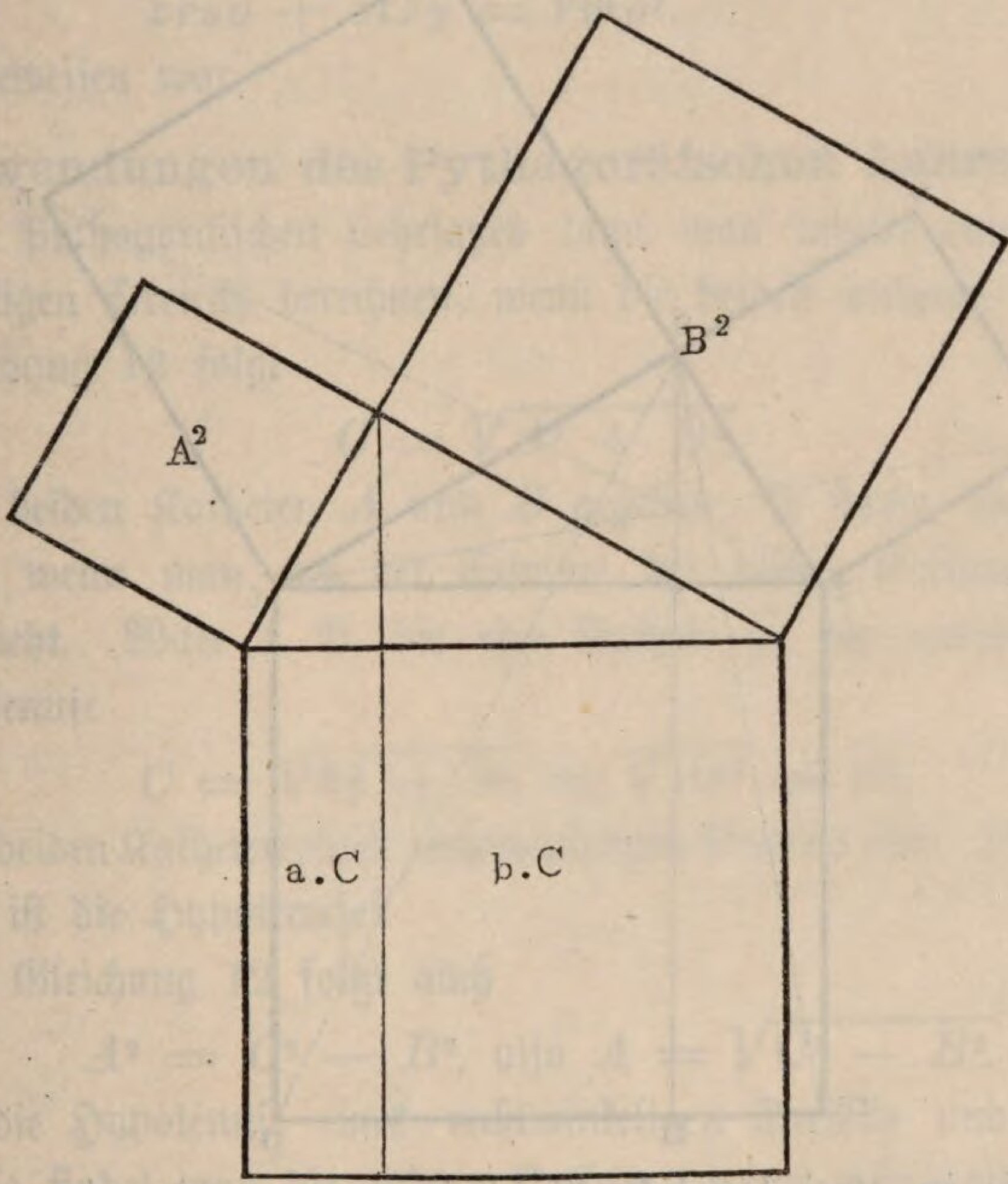
aus (4) folgt

$$B^2 = bC \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Betrachten wir zunächst die Gleichung (10). A^2 (Fig. 104) ist der Inhalt eines Quadrates, dessen Seite A ist (vergl. Fig. 104 mit Fig. 101), aC der Inhalt eines länglichen Rechtecks, dessen eine Seite a, dessen andere Seite C ist. In Fig. 104 ist das Quadrat ebenfalls durch A^2 und das längliche Rechteck durch aC bezeichnet. Nach Gleichung (10) aber ist der Inhalt dieses über der Seite A construirten Quadrats dem erwähnten Rechteck gleich. Aus Gleichung (11) folgt, daß das über B construirte Quadrat dem länglichen Rechteck gleich ist, dessen eine Seite b, dessen

andere Seite C ist. Die Quadrate der beiden Katheten A und B zusammen genommen sind demnach gleich der Summe der beiden länglichen Rechtecke $b\,C$ und $a\,C$; diese beiden Rechtecke bilden aber zusammen ein

Fig. 104.



Quadrat, dessen Seite gleich der Hypotenuse C ist; d. h. $a\,C + b\,C = C^2$, also auch

$$A^2 + B^2 = C^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

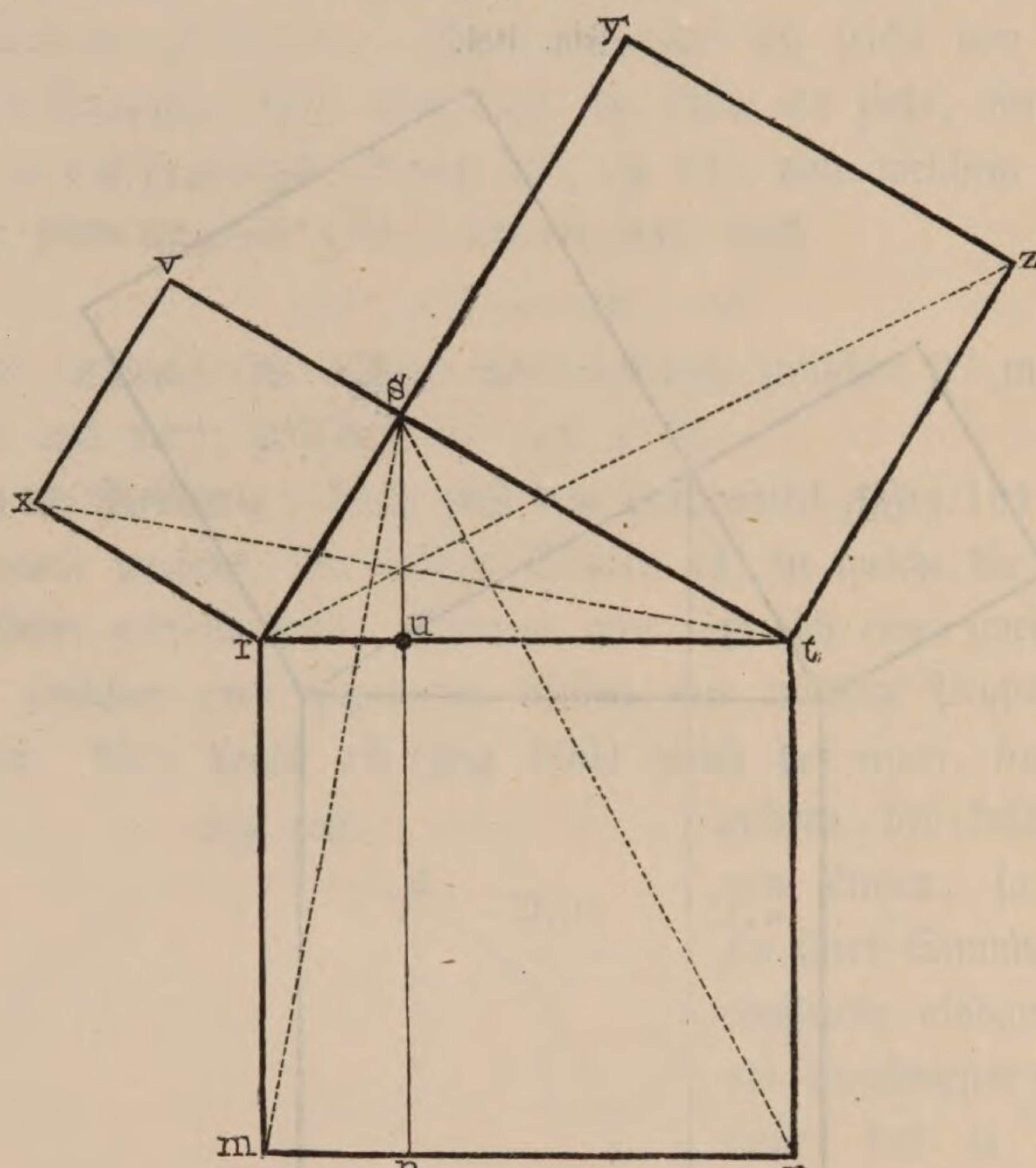
die Quadrate der beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind zusammengenommen gleich dem Quadrate der Hypotenuse. Dieser Satz wird der Pythagoräische Lehrsatz genannt.

Der Pythagoräische Lehrsatz gehört in jeder Beziehung zu den wichtigsten Lehrsätzen der Geometrie, woher es denn auch kommen mag, daß man für denselben eine große Anzahl von Beweisen aufgestellt hat, von welchen die meisten sich nicht, wie der eben mitgetheilte, auf die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke stützen. Einer der einfachsten unter diesen Beweisen ist der folgende.

Es sei rst (Fig. 105 a. f. S.) das rechtwinkelige Dreieck, $rsvx$ das Quadrat der einen Kathete, $stzy$ das Quadrat der zweiten Kathete

und *rtmp* das Quadrat der Hypotenuse. Fällt man von *s* ein Perpendikel auf die Hypotenuse, so theilt die Verlängerung desselben das Quadrat

Fig. 105.



der Hypotenuse in zwei längliche Rechtecke *rmnu* und *utpn*. — Zieht man die Linie *sm*, so entsteht ein Dreieck *rsm*, welches mit dem länglichen Rechteck *rmnu* gleiche Grundlinie *rm* und gleiche Höhe *ru* hat, folglich ist

$$rsm = \frac{1}{2}\, runm.$$

Zieht man die Linie *xt*, so entsteht das Dreieck *xrt*, von welchem sich leicht beweisen läßt, daß

$$xrt = \frac{1}{2}\, xrsv.$$

Nun aber ist ferner leicht zu beweisen, daß

$$\triangle\, rsm = \triangle\, xrt, \text{ (warum?)}$$

folglich ist auch

$$\frac{1}{2}\, runm = \frac{1}{2}\, xrsv,$$

und endlich

$$runm = xrsv.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich darthun, daß

$$stzy = utpn,$$

also endlich auch, daß

$$xrsv + stzy = runm + unpt,$$

oder endlich

$$xrsv + stzy = rmpt,$$

was zu beweisen war.

Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes. Mit 50
Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes kann man immer eine Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks berechnen, wenn die beiden anderen bekannt sind. Aus Gleichung 12 folgt

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Sind die beiden Katheten A und B gegeben, so findet man die Hypotenuse C, wenn man aus der Summe der beiden Kathetenquadrate die Wurzel zieht. Wäre z. B. die eine Kathete 6′, die andere 8′, so wäre die Hypotenuse

$$C = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks seien 23^{cm} und 32^{cm}, wie groß ist die Hypotenuse?

Aus Gleichung 12 folgt auch

$$A^2 = C^2 - B^2, \text{ also } A = \sqrt{C^2 - B^2}.$$

Ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks und eine Kathete gegeben, so findet man die andere Kathete, wenn man das Quadrat der bekannten Kathete von dem Quadrate der Hypotenuse abzieht und aus der gefundenen Differenz die Wurzel zieht. Wäre z. B. die Hypotenuse 5, die eine Kathete 4, so ist die andere

$$\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sei 28′, die eine Kathete 12′, wie groß ist die andere?

In Fig. 101 sei $A = 5$, $B = 9$ mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes und mit Hülfe der Proportionalität der Seiten, die Linien C, a, b und p zu berechnen!

Die Lösung vieler geometrischen Aufgaben läßt sich auf den Pythagoräischen Lehrsatz zurückführen, wie dies durch folgende Beispiele erläutert wird.

1. Jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei 4′; wie groß ist sein Inhalt?

Auflösung. Fällt man von der Spitze des Dreiecks ein Perpendikel p auf die Grundlinie, so wird diese dadurch in zwei gleiche Theile getheilt, deren jede 2' lang ist. Das Perpendikel p ist aber nun eine Kathete in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Hypotenuse 4' und dessen eine Kathete 2' ist, wir haben demnach

$$p = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}.$$

Der gefundene Werth von p ist nun die Höhe des Dreiecks, und muß mit der halben Grundlinie multiplicirt werden, wenn man den verlangten Inhalt finden will, welcher also gleich $2\sqrt{12}$, oder gleich $4\sqrt{3}$ ist.

Bezeichnet man mit s die eine Seite eines gleichseitigen Dreiecks, so ist das Perpendikel

$$p = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{s}{2}\sqrt{3}$$

und der Inhalt des Dreiecks $J = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$.

2. Die Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sei a, jede der beiden anderen Seiten sei b; wie lang ist das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel?

Antwort: $p = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

3. Die Grundlinie eines länglichen Rechtecks sei a, die Höhe b, wie groß ist die Diagonale d?

Antwort: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Jede Seite eines Quadrates sei a, wie groß ist die Diagonale?

Antwort: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

5. Die Diagonale eines Quadrates sei d, wie groß ist jede Seite a des Quadrates?

Auflösung. Nach der unter Nr. 4 gefundenen Gleichung $d = a\sqrt{2}$, in welcher d die Diagonale und a die Seite des Quadrates bezeichnet, ergiebt sich

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Der Inhalt des eben betrachteten Quadrates ist a^2, und da $d^2 = 2a^2$, so ist also der Inhalt des Quadrates, welches man über der Diagonale construiren kann, doppelt so groß, als der Inhalt des Quadrates, in welchem die Diagonale gezogen ist.

6. Der Radius eines Kreises sei r, wie groß ist die Seite a des in diesem Kreise beschriebenen Quadrates?

Antwort. Der Durchmesser des Kreises, $2r$, ist die Diagonale des Quadrates, also $a = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r.\sqrt{2}$.

7. Die Seite eines regelmäßigen Achtecks sei s, wie groß ist der Radius des in- und umschriebenen Kreises?

Die Auflösung dieser Aufgabe soll hier bloß angedeutet werden. Verlängert man die Seite ab (Fig. 106) und die ihr gegenüberstehende, ferner cd und die ihr gegenüberstehende, so entsteht ein Quadrat, dessen Seite fe gleich dem Durchmesser $2r$ des inbeschriebenen Kreises ist. $fe = dc + 2 \times ce$, $ce = \frac{bc}{\sqrt{2}} = \frac{s}{\sqrt{2}}$, also $fe = s + \frac{2s}{\sqrt{2}}$ $= s\,(1 + \sqrt{2})$, also $r = s \,.\, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. Der Durchmesser $2R$ des umschriebenen Kreises ist gleich ag; ag ist die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks abg, dessen Katheten bekannt sind. Es ist $ab = s$ und $bg = 2r$, folglich

$$4R^2 = s^2 + 4r^2.$$

Man führe die Rechnungen für den Fall aus, daß $s = 5'$.

Fig. 106.

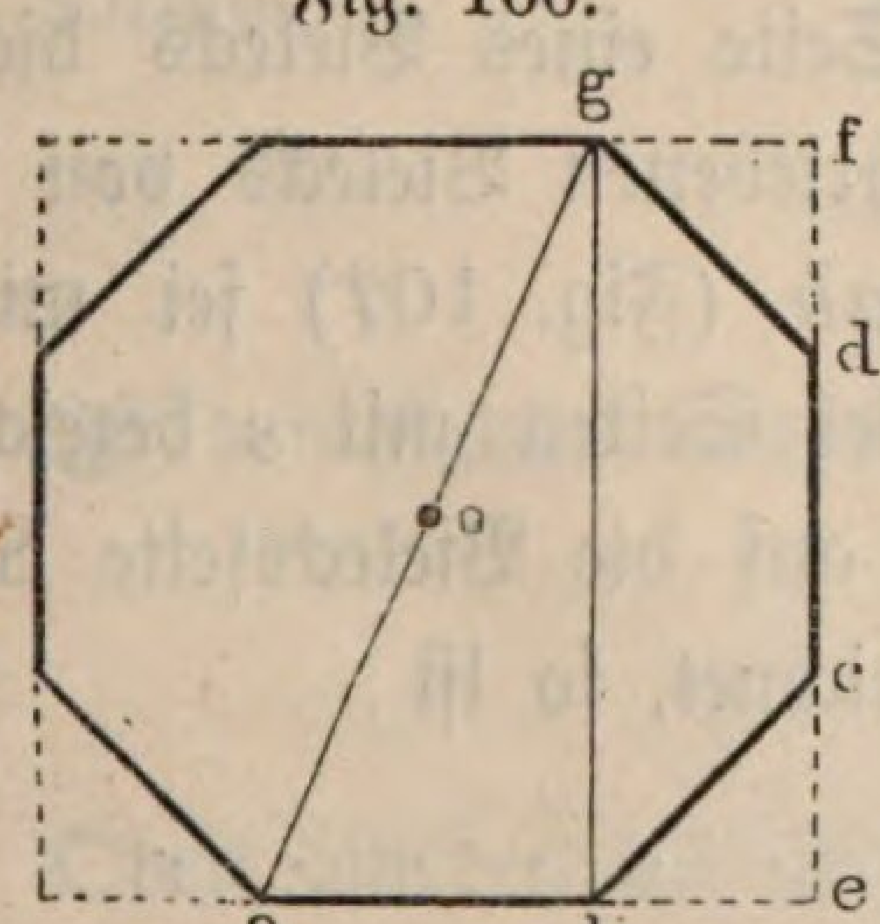
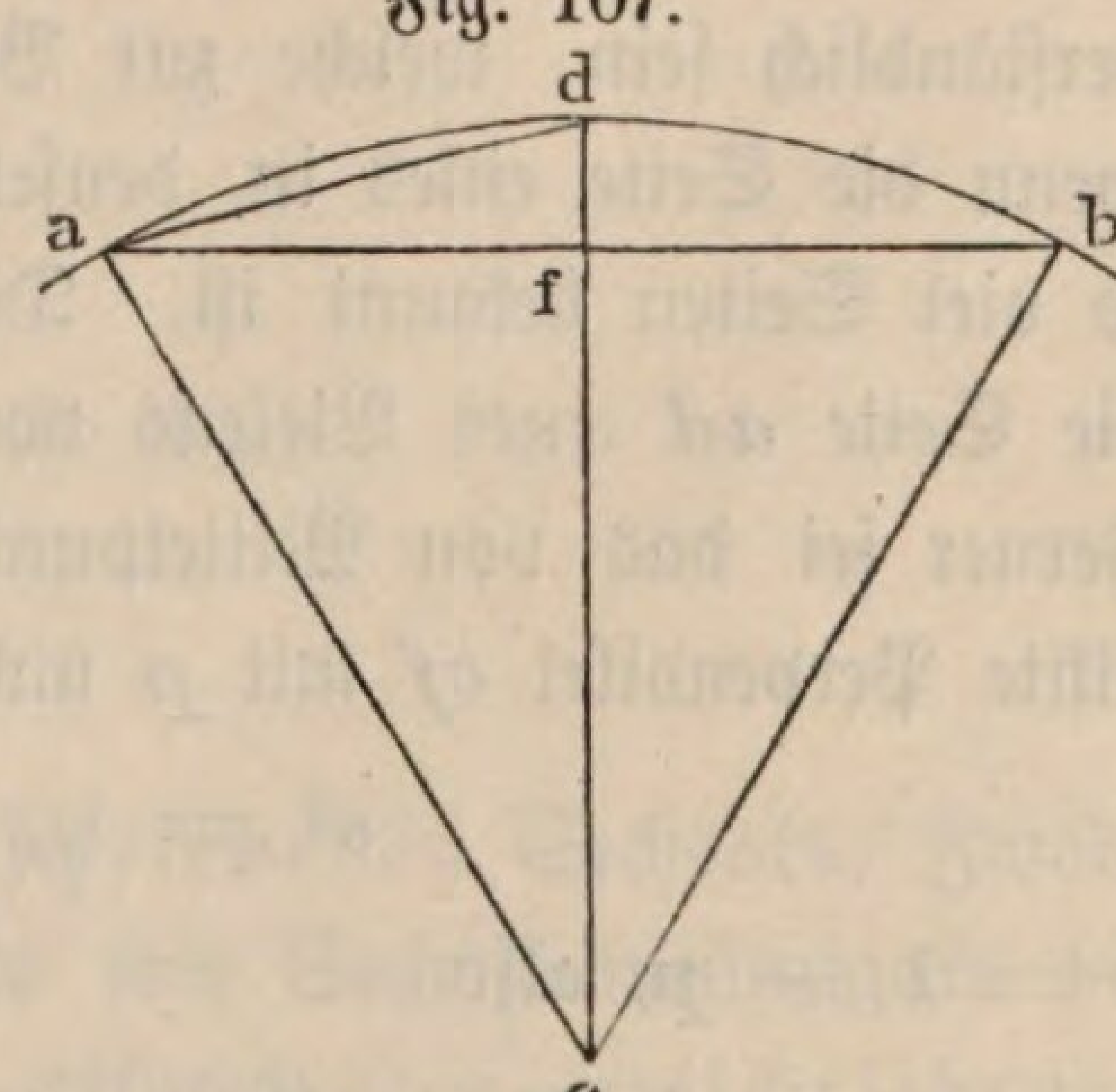


Fig. 107.



8. Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen Zwölfecks, wenn der Radius des umschriebenen Kreises $1'$ beträgt?

Auflösung. Wenn der Radius des Kreises 1 ist, so ist auch die Seite ab (Fig. 107) des in den Kreis beschriebenen Sechsecks gleich 1. Die Seite ad des in demselben Kreise beschriebenen Zwölfecks ist die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks afd, also

$$\overline{ad^2} = \overline{af^2} + \overline{fd^2}.$$

Wäre af und fd bekannt, so ergäbe sich daraus leicht die gesuchte Zwölfecksseite; af ist die halbe Sechsecksseite, also $^1/_2{}'$, mithin $\overline{af}^2 = {}^1/_4 = 0{,}25 \square'$; fd muß aber erst berechnet werden. $fd = cd - cf$; aus dem rechtwinkeligen Dreieck afc aber ergiebt sich $\overline{fc}^2 = \overline{ac}^2 - \overline{af}^2 = 1 - {}^1/_4 = {}^3/_4 = 0{,}75$, mithin ist $fc = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866025$, also $fd = 1 - 0{,}866025 = 0{,}133975$, und endlich

$$ad = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}133975^2} = 0{,}516638.$$

Da nun die Zwölfecksseite bekannt ist, so kann man auf dieselbe Weise die Seite des in denselben Kreis beschriebenen Vierundzwanzigecks dann die Seite des Achtundvierzigecks, des Sechsundneunzigecks u. s. w. berechnen.

Es ist sehr gut, ja zum ganz klaren Verständniß des Folgenden fast unentbehrlich, alle hier angedeuteten Rechnungen auszuführen, d. h. die Seiten der erwähnten Vielecke wirklich wenigstens bis zum Sechsundneunzigeck, und zwar bis zur sechsten Decimalstelle zu berechnen.

Ebenso berechne man die Seite eines Quadrats, welches in einen Kreis beschrieben, dessen Radius 1 ist; von diesem Quadrate ausgehend die Seiten des in denselben Kreis beschriebenen Achtecks, Sechszehnecks u. s. w.

Nachdem der Schüler alle diese Rechnungen mit der gehörigen Sorgfalt ausgeführt hat, werden ihm wohl die folgenden allgemeinen Formeln verständlich sein, welche zur Berechnung der Seite eines Vielecks dienen, wenn die Seite eines in denselben Kreis beschriebenen Vielecks von halb so viel Seiten bekannt ist. Die Vielecksseite ab (Fig. 107) sei mit S, die Seite ad eines Vielecks von doppelt so viel Seiten mit s bezeichnet. Ferner sei das von Mittelpunkte des Kreises auf die Vielecksseite S gefällte Perpendikel cf mit p und df mit t bezeichnet, so ist

$$s^2 = {}^1/_4\, S^2 + t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$t = 1 - p$, also

$$s^2 = {}^1/_4\, S^2 + (1-p)^2 = {}^1/_4\, S^2 + 1 - 2p + p^2 \quad . \quad (2)$$

nun aber ist $p^2 = \overline{ac}^2 - \overline{af}^2 = 1 - {}^1/_4\, S^2$, also $p = \sqrt{1 - {}^1/_4\, S^2}$. Setzt man diese Werthe in den Werth von s^2 in der Gleichung bei 2, so kommt

$$s^2 = {}^1/_4\, S^2 + 1 - 2\sqrt{1 - {}^1/_4\, S^2} + 1 - {}^1/_4\, S^2,$$

daraus

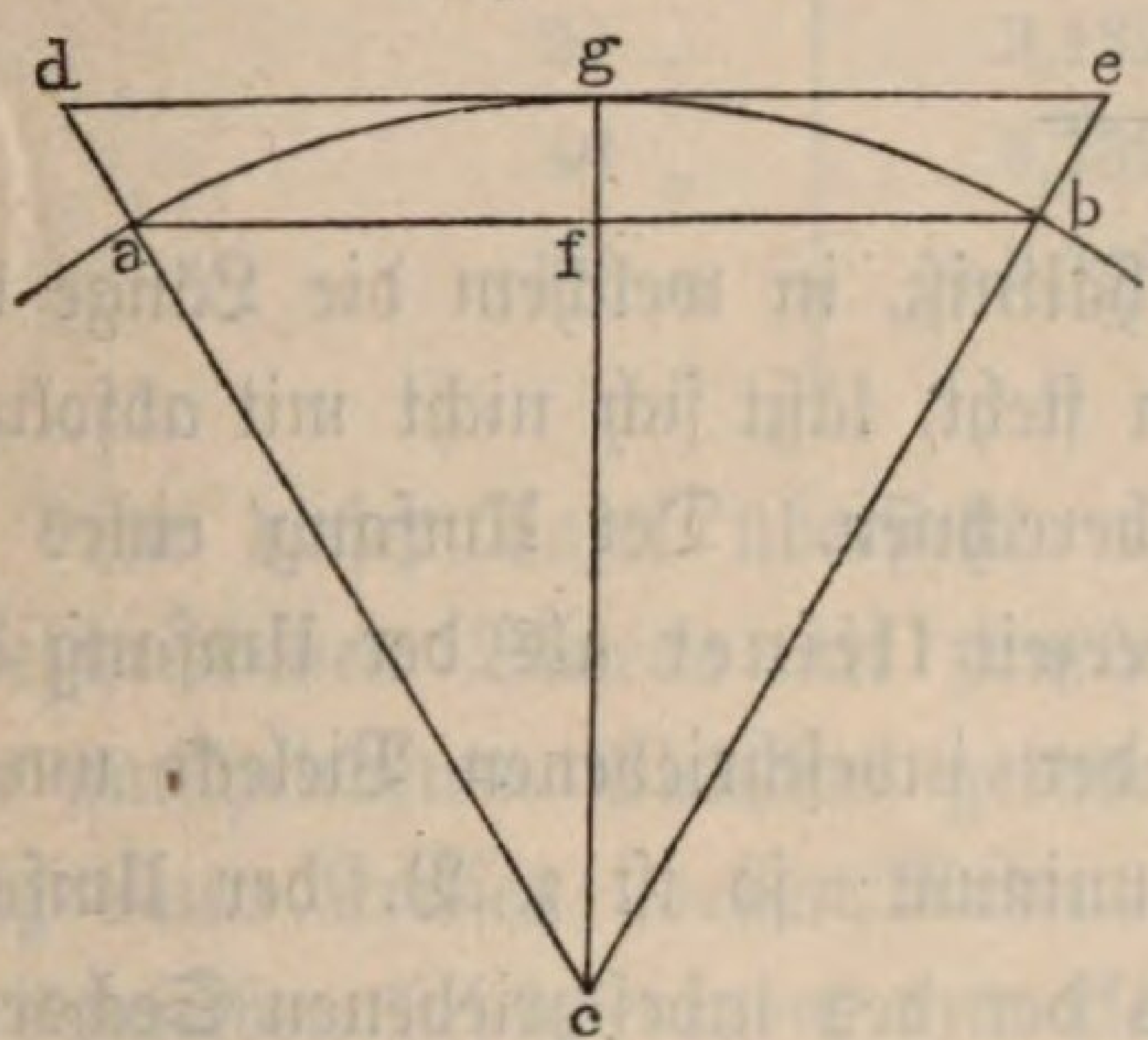
$$s^2 = 2 - 2\sqrt{1 - {}^1/_4\, S^2},$$

und endlich

$$s = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}S^2}}.$$

Für das Verständniß des folgenden Abschnittes ist noch die Auflösung der folgenden Aufgabe wichtig.

Fig. 108.



Die Seite eines um einen Kreis beschriebenen Vielecks zu berechnen, wenn die Seite eines in denselben Kreis beschriebenen Vielecks von eben so viel Seiten bekannt ist. In Fig. 108 ist ab die Seite eines inbeschriebenen, de die Seite eines umschriebenen Vielecks von gleichviel Seiten; aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt

$$cf : ab = cg : de.$$

Bezeichnet man die Seite ab des inbeschriebenen Vielecks mit s, die Seite de des umschriebenen Vielecks mit S, das vom Mittelpunkte des Kreises auf s gefällte Perpendikel cf mit p, den Radius cg des Kreises mit r, so wird obige Proportion

$$p : s = r : S,$$

und daraus

$$S = \frac{s \cdot r}{p}.$$

Ist der Radius des Kreises gleich 1, so wird

$$S = \frac{s}{p}.$$

Oben wurden die Seiten eines inbeschriebenen Sechsecks, Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks und Sechsundneunzigecks berechnet; wie groß sind die Seiten der entsprechenden umschriebenen Vielecke?

Achtes Kapitel.

Berechnung des Kreisumfanges und des Kreisinhaltes.

51 **Der Kreisumfang.** Das Verhältniß, in welchem die Länge des Kreisumfanges zum Halbmesser desselben steht, läßt sich nicht mit absoluter Genauigkeit, sondern nur annähernd berechnen. Der Umfang eines **in** einen Kreis beschriebenen Vielecks ist jederzeit kleiner als der Umfang des Kreises selbst, jedoch wird der Umfang der inbeschriebenen Vielecke um so größer, jemehr die Zahl der Seiten zunimmt; so ist z. B. der Umfang des inbeschriebenen Zwölfecks größer als der des inbeschriebenen Sechsecks. Mit zunehmender Seitenzahl nähert sich demnach der Umfang des inbeschriebenen Vielecks immer mehr und mehr dem Umfange des Kreises, ohne daß er ihm jemals vollkommen gleich wird. So ist z. B. der Umfang eines in einen Kreis beschriebenen Tausendecks gewiß noch kleiner, als der Umfang des Kreises selbst; er ist jedoch von demselben so wenig verschieden, daß man ihn ohne bedeutenden Fehler für den Kreisumfang selbst nehmen kann. Die angenäherte Berechnung des Kreisumfanges beruht demnach darauf, den Umfang eines Vielecks von so vielen Seiten zu berechnen, daß man ihn ohne merklichen Fehler dem Kreisumfange selbst gleichsetzen kann.

Der Umfang eines **um** den Kreis beschriebenen Vielecks ist jederzeit größer, als der Umfang des Kreises selbst; er nimmt aber mit der Zahl der Seiten fortwährend ab, und nähert sich also gleichfalls dem Kreisumfange. Dadurch hat man ein Mittel, zwei Gränzen anzugeben, zwischen welchen der Kreisumfang liegen muß.

In der folgenden Tabelle enthält die erste Columne die Benennung der Vielecke, die zweite den halben Umfang des inbeschriebenen, die letzte den halben Umfang des umschriebenen Vielecks, wenn der Radius des Kreises selbst gleich 1 ist. Man erhält den halben Umfang eines solchen Vielecks leicht, wenn man den nach den Angaben auf S. 85 bis 87 gefundenen Werth der Vielecksseite mit der halben Anzahl der Seiten multiplicirt, also z. B. den halben Umfang des Vierundzwanzigecks, wenn man eine Vierundzwanzigecksseite mit 12 multiplicirt.

	Inbeschrieben	Umschrieben
6=Eck	3	3,4641
12 „	3,1058	3,2153
24 „	3,1325	3,1596
48 „	3,1393	3,1460
96 „	3,1410	3,1427

In dieser Tafel übersieht man sehr deutlich, wie der Umfang der inbeschriebenen Vielecke mit zunehmender Seitenzahl wächst, während bei den umschriebenen Vielecken gerade das Gegentheil stattfindet. Der Umfang eines Kreises, dessen Radius 1 ist, ist größer als der Umfang des in demselben beschriebenen, und kleiner als der Umfang des um denselben beschriebenen Sechsecks, er liegt also zwischen 3 und 3,4641. Diese beiden Gränzen liegen aber noch ziemlich weit von einander, deshalb kann man aus der Vergleichung des in= und umschriebenen Sechsecks noch keinen, nur etwas genauen Werth des Kreisumfanges ziehen. Die Umfänge des in= und umschriebenen Zwölfecks sind schon weniger von einander verschieden, wir erhalten dadurch schon näher beisammen liegende Gränzen, zwischen denen der Kreisumfang liegen muß; wir sehen nämlich, daß er zwischen 3,1058 und 3,2153 liegt; noch engere Gränzen erhalten wir durch Vergleichung des in= und umschriebenen Vierundzwanzigecks u. s. w. Der halbe Umfang des inbeschriebenen Sechsundneunzigecks ist 3,1410, der des umschriebenen aber 3,1427. Zwischen diesen beiden Werthen liegt der Werth für den halben Kreisumfang. Da nun beide Zahlen bis auf zwei Decimalstellen übereinstimmen, so kann man, wenn man den halben Kreisumfang nur bis auf zwei Decimalstellen genau haben will, denselben für 3,14 annehmen. Dieser Werth ist von dem wahren Werthe des halben Kreisumfanges sicherlich nicht um 0,01 verschieden. Will man den halben Kreisumfang noch auf mehr Decimalstellen genau haben, so muß man die Umfänge der in= und umschriebenen Vielecke von noch mehr Seiten, des 192 Ecks, des 384 Ecks u. s. w., vergleichen. Bezeichnen wir mit π den halben Umfang des Kreises, dessen Radius 1 ist, so ist π auf 8 Decimalstellen genau bestimmt

$$\pi = 3{,}14159265.$$

Der halbe Umfang des Kreises wächst in demselben Verhältniß, in

welchem der Radius wächst. Ist der Radius des Kreises 1, so ist der halbe Umfang $= \pi$, ist der Radius 2, so ist der halbe Umfang 2π; er ist 6π, wenn der Radius 6, 10π, wenn der Radius 10 ist. Man findet stets den halben Umfang des Kreises, wenn man seinen Radius mit π multiplicirt. Bezeichnen wir den Umfang des Kreises mit P, den Radius mit r, so ist demnach

$$\tfrac{1}{2} P = r . \pi,$$

und daraus

$$P = 2 . r . \pi,$$

d. h. in Worten: man findet den ganzen Umfang des Kreises, wenn man den doppelten Radius, oder, was dasselbe ist, den Durchmesser mit π multiplicirt.

Beispiele. Der Radius eines Kreises ist $3' \, 4''$, wie groß ist sein Umfang?

Der Durchmesser eines Baumes beträgt 273^{mm}, wie groß ist sein Umfang?

Ist der ganze Umfang bekannt, so ist es leicht, den dritten, vierten, fünften u. s. w. Theil des Umfanges zu finden; man kann demnach auch leicht folgende Aufgabe lösen. In einem Kreise, dessen Radius $18'$ beträgt, sind zwei Halbmesser gezogen, die einen Winkel von 23^0 mit einander machen, wie groß ist der Bogen, den diese Halbmesser einschließen?

Aus der Gleichung $P = 2\pi . r$ zieht man

$$r = \frac{P}{2\pi}.$$

Wenn der Umfang des Kreises gegeben ist, so findet man den Radius, wenn man den Umfang durch 2π dividirt.

Der Umfang eines runden Tisches beträgt $25'$, wie groß ist der Halbmesser desselben?

52 **Der Kreisinhalt.** Wie oben §. 38 gezeigt wurde, findet man den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks, wenn man den halben Umfang desselben mit dem aus dem Mittelpunkte auf eine Vielecksseite gefällten Perpendikel multiplicirt. Man findet demnach auch den angenäherten Inhalt des Kreises, indem man den Kreis als ein Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet, wenn man den halben Umfang $\frac{P}{2}$ mit dem aus dem Mittelpunkte auf die Peripherie gefällten Perpendikel multiplicirt. Dieses Perpendikel ist aber nichts anderes, als der Radius; es ist demnach

$$J = \frac{P}{2} r,$$

wenn J den Inhalt des Kreises bezeichnet. Setzen wir für P seinen oben gefundenen Werth, so kommt

$$J = \pi r^2,$$

d. h. man findet den Inhalt des Kreises, wenn man den Radius mit sich selbst und das gefundene Product mit π multiplicirt.

Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Radius 27′ 5″ ist?

Aus der Gleichung $J = \pi r^2$ zieht man

$$r = \sqrt{\frac{J}{\pi}}.$$

Ist der Inhalt eines Kreises bekannt, so findet man den Radius, wenn man den Inhalt durch π dividirt, und aus dem gefundenen Quotienten die Wurzel zieht.

Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 738 □″, wie groß ist sein Radius?

Zweites Buch.

Stereometrie.

Einleitung.

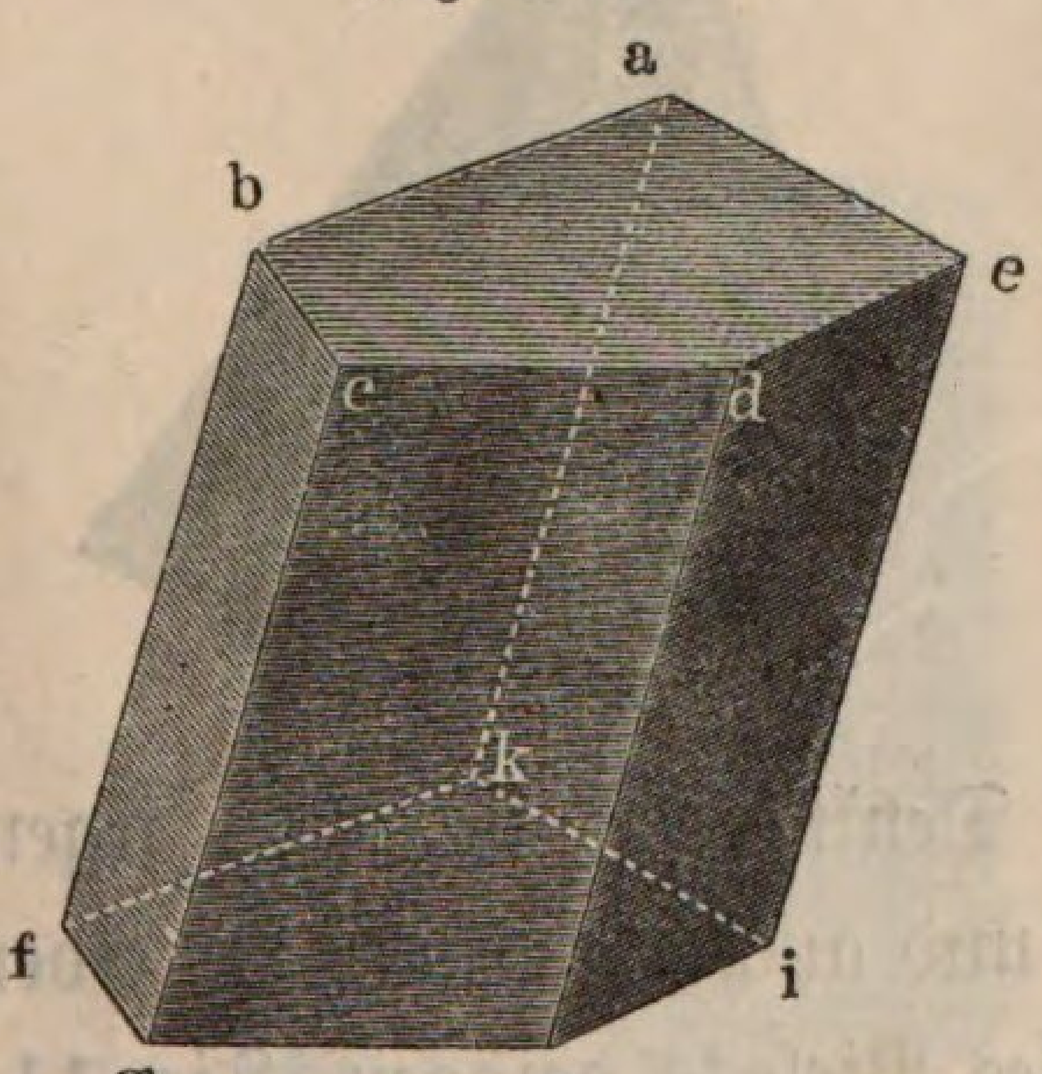
Die Stereometrie beschäftigt sich mit der Betrachtung von Körpern, d. h. von Raumgrößen, welche nach drei Dimensionen ausgedehnt sind. 53

Die Elementar-Stereometrie beschränkt sich auf die Berechnung der Oberfläche und des körperlichen Inhalts von Prismen, Pyramiden, Cylindern, Kegeln und Kugeln.

Ecksäulen oder Prismen. Denkt man sich durch irgend einen Punkt eines Vielecks eine gerade Linie gezogen, welche mit der Ebene dieses Vielecks einen beliebigen Winkel macht, und diese Linie dann parallel mit sich selbst an den Seiten des Vielecks hingeführt, so wird sie eine Reihe von Parallelogrammen beschreiben, die einen Körper einschließen, welcher den Namen einer Ecksäule oder eines Prismas führt. 54

Denkt man sich z. B. durch den Eckpunkt *b* des Fünfecks *abcde*, Fig. 109, eine Linie *bf* gezogen, und diese Linie parallel mit sich selbst an der Kante *bc* hingeschoben, so entsteht ein Parallelogramm *bcfg*. Wird die Linie alsdann weiter an *cd* hingeschoben, so entsteht das Parallelogramm *cdgh* u. s. w. Die auf diese Weise entstandenen Parallelogramme bilden mit dem obern und untern Fünfeck eine fünfseitige Säule oder, was dasselbe ist, ein fünfseitiges Prisma.

Fig. 109.



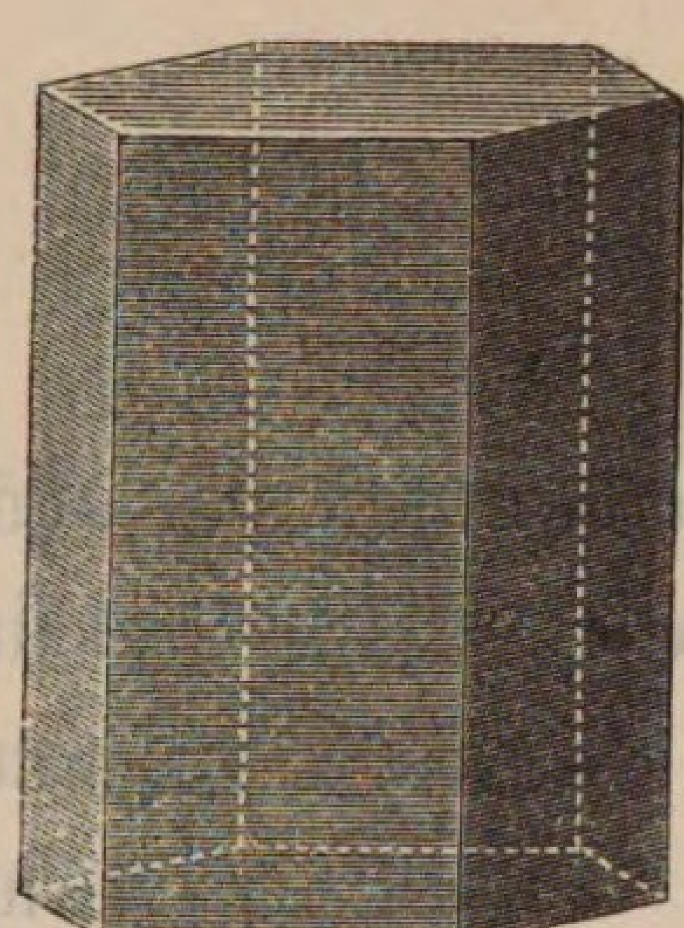
Die Seiten, in welchen zwei der erwähnten Parallelogramme zusammentreffen, also die Kanten *bf, cg, dh, ei* und *ak*, werden die Seitenkanten des Prismas genannt.

Die Kanten, welche die genannten Parallelogramme mit dem obern oder dem untern Vieleck (den Endflächen, deren untere man gewöhnlich die Grundfläche nennt) des Prismas bilden, also *bc, cd, de* u. s. w., *fg, gh, hi* u. s. w., heißen Grundkanten.

Je nachdem die Grundfläche eines Prismas 3, 4, 5 u. s. w. Seiten hat, unterscheidet man 3seitige, 4seitige, 5seitige u. s. w. Prismen.

Gerade Ecksäulen sind solche, bei welchen die Seitenkanten mit der Ebene der Grundfläche rechte Winkel bilden, wie in Fig. 110, welche eine gerade sechsseitige Säule darstellt. Die Seitenflächen einer geraden Ecksäule sind sämmtlich längliche Rechtecke.

Fig. 110.



Eine vierseitige Ecksäule, deren Basis ein Parallelogramm ist, ein Körper also, welcher von lauter Parallelogrammen begränzt wird, heißt ein Parallelopipedum.

Ein Parallelopiped, welches von lauter länglichen Rechtecken begränzt ist, also eine gerade Ecksäule, deren Basis ein längliches Rechteck ist, Fig. 111, wird Langwürfel genannt.

Ein von sechs Quadraten begränztes Parallelopiped, Fig. 112, wird ein Würfel genannt.

Fig. 111.

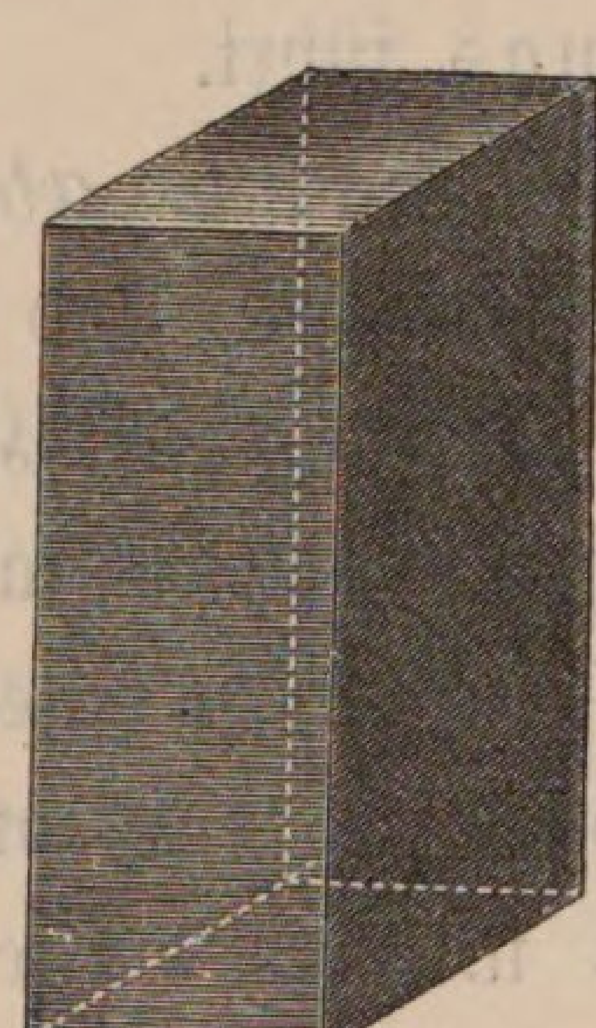


Fig. 112.

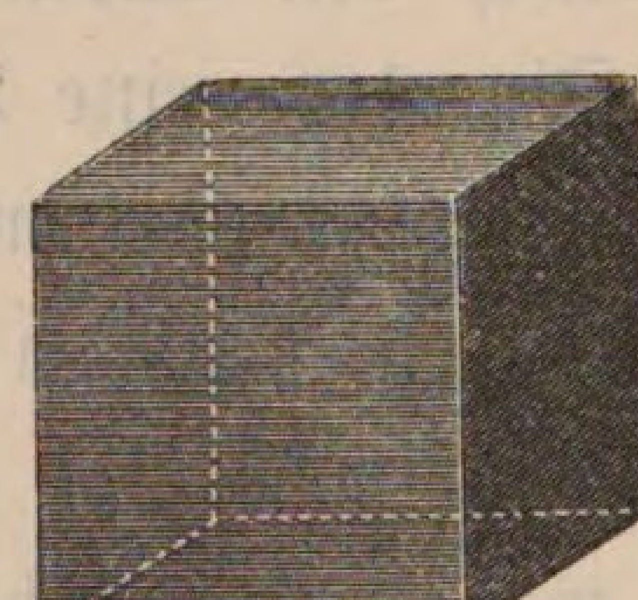
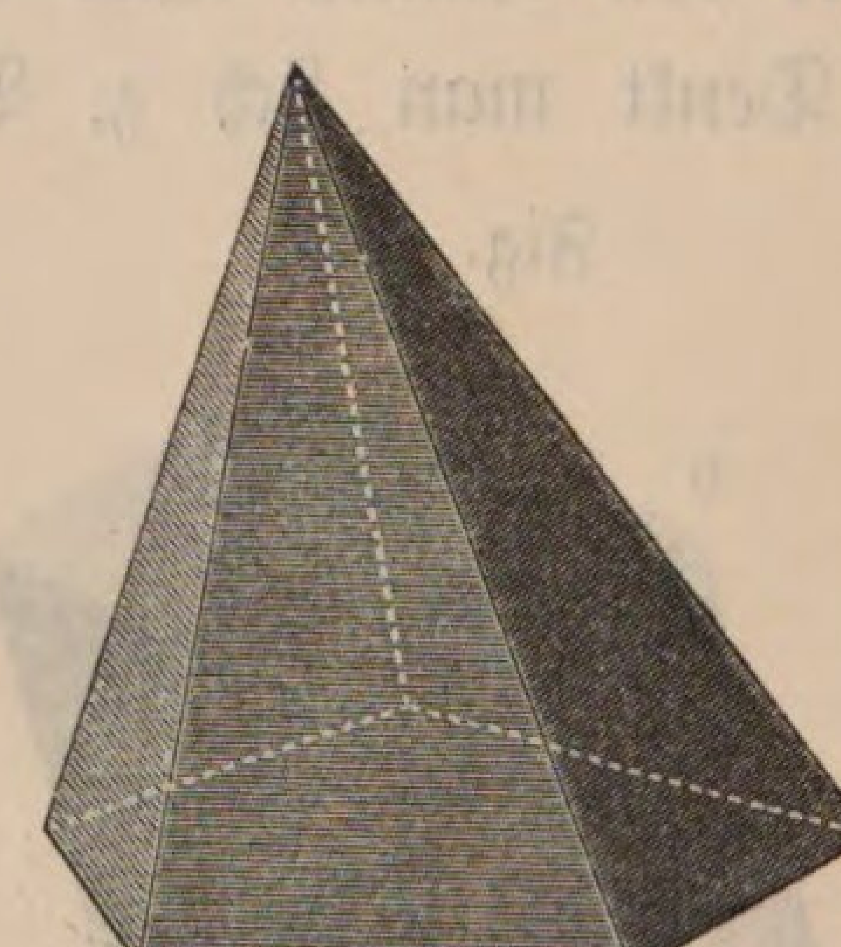


Fig. 113.



55 **Pyramiden oder Spitzsäulen.** Denkt man sich von irgend einem Punkte, welcher außerhalb eines Vielecks und auch außerhalb der Ebene desselben liegt, Linien nach den Eckpunkten dieses Vielecks gezogen, Fig. 113,

so entsteht eine Reihe von Dreiecken, welche mit dem besprochenen Vieleck (der Grundfläche) eine Pyramide, eine Spitzsäule, bilden.

Wenn die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck ist, und wenn der Mittelpunkt dieses regelmäßigen Vielecks gerade unter der Spitze liegt, so ist die Pyramide eine regelmäßige.

Fig. 114 ist eine regelmäßige vierseitige und Fig. 115 ist eine regelmäßige sechsseitige Pyramide.

Fig. 114.

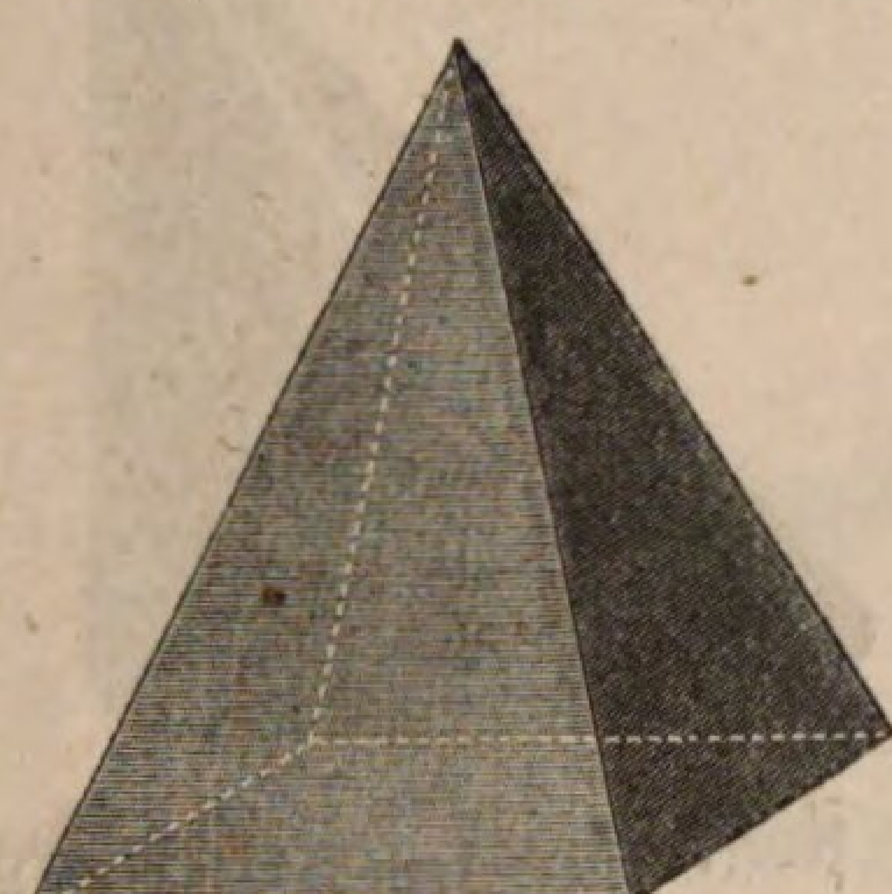
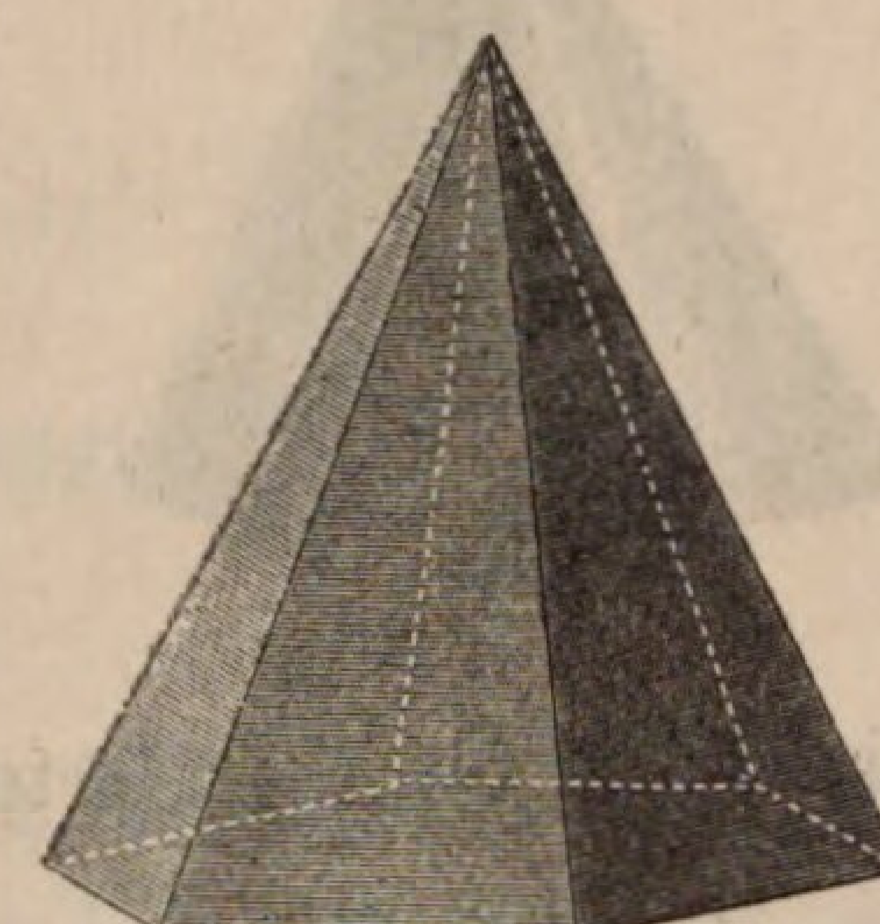


Fig. 115.



An jeder regelmäßigen Pyramide sind alle Seitenflächen einander gleich, und zwar sind es lauter ~~gleichseitige~~ Dreiecke. gleichschenkelige

Cylindrische und conische Flächen. Wenn das Vieleck, 56
an dessen Kanten hin die Erzeugungslinie parallel mit sich selbst fortgeschoben wird, ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, also eine krumme Linie ist, so entsteht eine Cylinderfläche. Der durch die Cylinderfläche und die beiden Endflächen begränzte Körper heißt ein Cylinder oder eine Walze. In der Elementargeometrie betrachtet man nur Cylinder von kreisförmiger Basis. Man erhält einen geraden Cylinder, wenn die erzeugende Linie auf der Ebene des leitenden Kreises rechtwinkelig steht.

Fig. 116 stellt einen geraden, Fig. 117 stellt einen schiefen Cylinder dar.

Fig. 116.

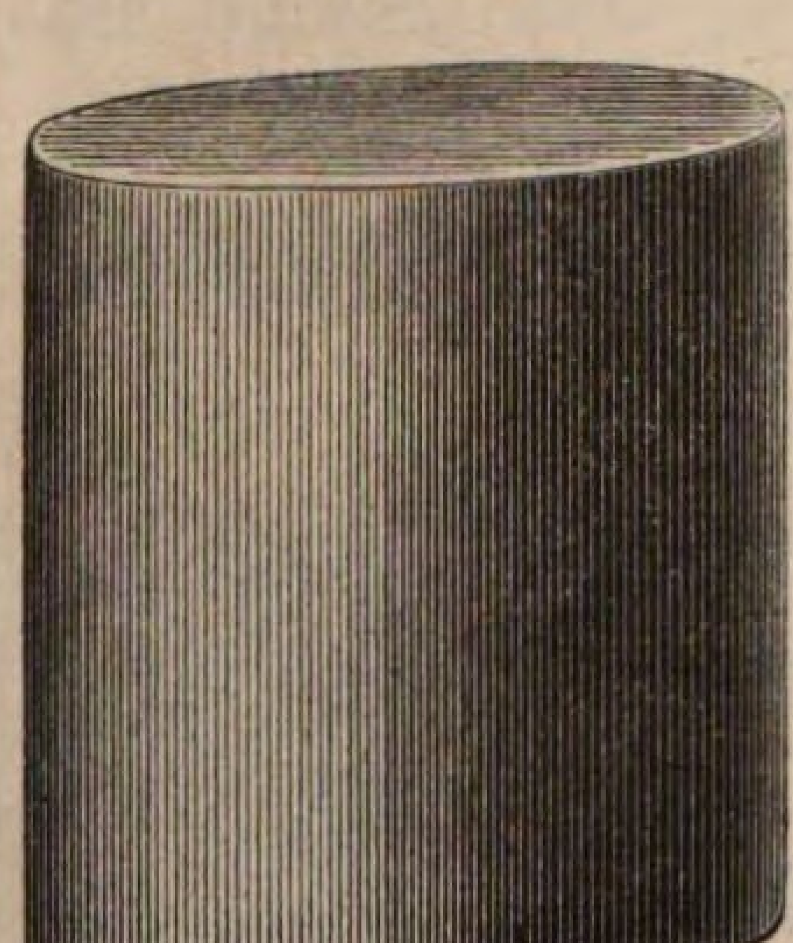
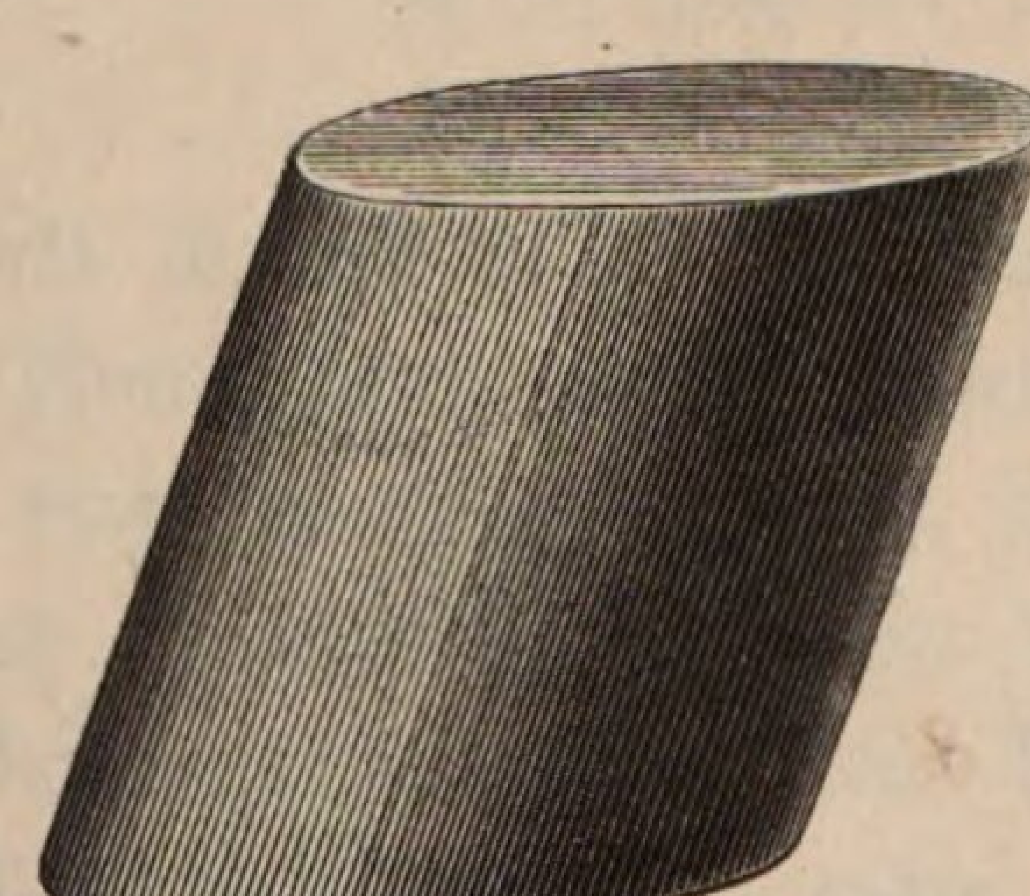


Fig. 117.



Der Kegel, Conus, steht zu der Pyramide in demselben Verhältniß wie der Cylinder zum Prisma. Wenn die Basis einer Pyramide in eine krumme Linie übergeht, so wird die Pyramide zum Kegel.

In der Elementargeometrie betrachtet man nur Kegel von kreisförmiger Basis.

Fig. 118.

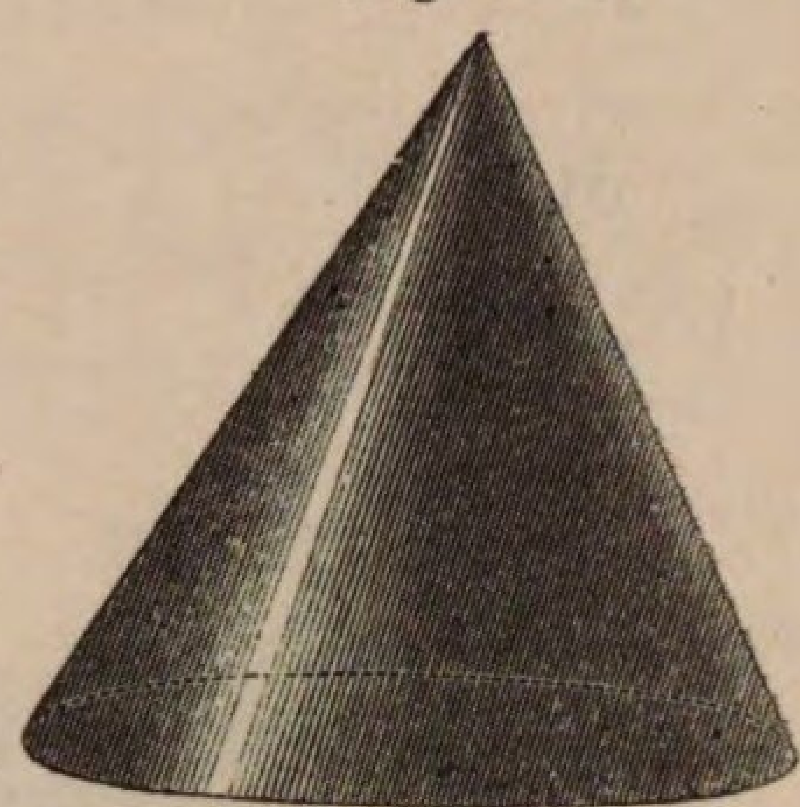


Fig. 119.

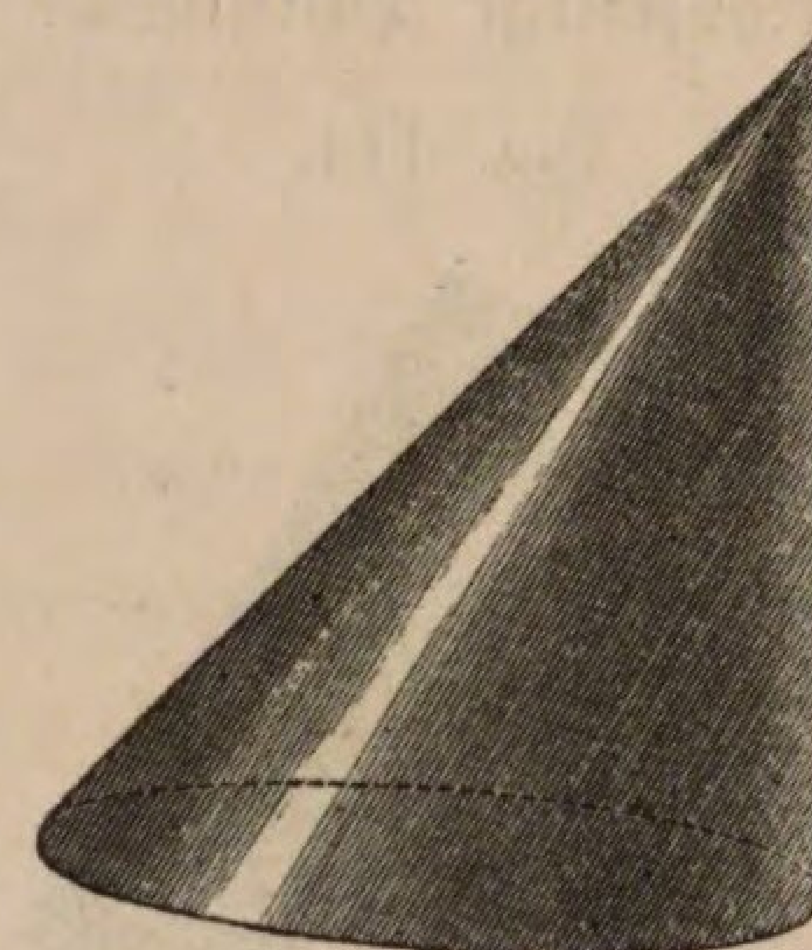


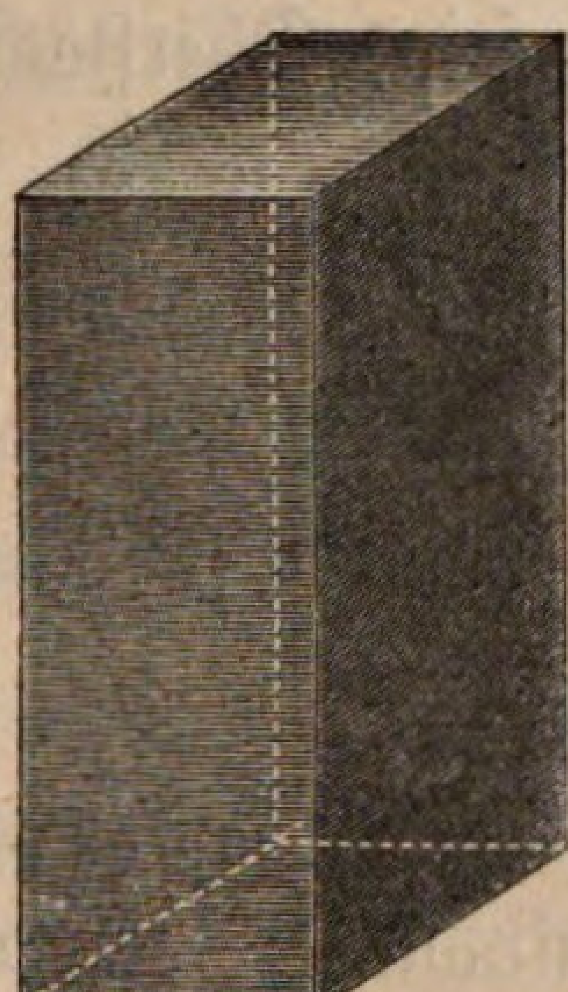
Fig. 118 stellt einen geraden, Fig. 119 stellt einen schiefen Kegel dar.

Erstes Kapitel.

Berechnung der Körperoberflächen.

Oberflächen der Prismen. Da die Prismen von lauter ebenen 57
Flächen begränzt sind, so findet man ihre Gesammtoberfläche, wenn man den Flächeninhalt jeder einzelnen Gränzfläche nach den Lehren der ebenen Geometrie berechnet und die Flächeninhalte aller einzelnen Gränzflächen addirt.

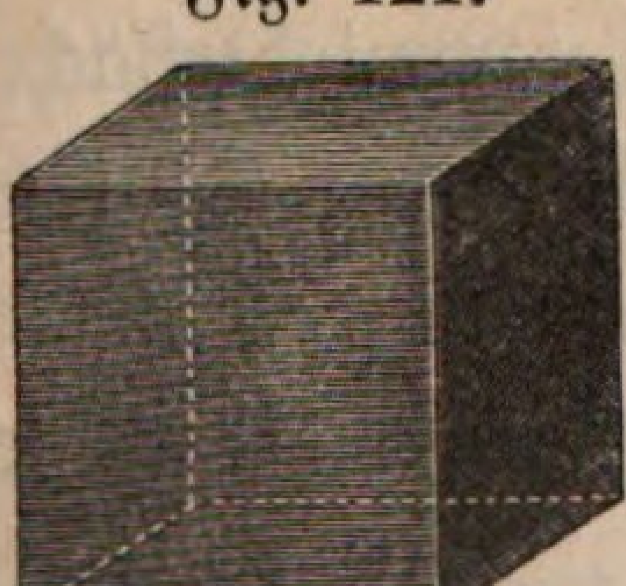
Fig. 120.



Es seien z. B. die beiden Seiten der Grundfläche des Langwürfels (Fig. 120) 7 Zoll und 18 Zoll, seine Höhe 20 Zoll, so ist der Inhalt der Grundfläche $7 \times 18 = 126 \,\Box''$. Die obere Gränzfläche ist gerade eben so groß. Der Inhalt der Fläche rechts ist $20 \times 18 = 360 \,\Box''$, und eben so groß ist die Fläche links. Der Inhalt der vordern Fläche sowohl als der der hintern ist aber $7 \times 20 = 140 \,\Box''$. Wir haben also

für die obere und untere Fläche	$2 \times 126 = 252 \,\Box''$
für die vordere und hintere Fläche . . .	$2 \times 140 = 280 \,\Box''$
für die Flächen rechts und links	$2 \times 360 = 720 \,\Box''$
Die Gesammtoberfläche des Langwürfels ist also	$1252 \,\Box''$.

Fig. 121.



Da die sechs Gränzflächen eines Würfels sämmtlich Quadrate und einander gleich sind, so findet man die Oberfläche eines Würfels, wenn man die zweite Potenz der Würfelkante mit 6 multiplicirt. Wäre z. B. die Seite eines Würfels 5 Zoll, so wäre seine Gesammtoberfläche $6 . 5^2 = 150 \,\Box''$.

Bei geraden Prismen sind alle Seitenflächen längliche Rechtecke; sie haben sämmtlich gleiche Höhe, und zwar ist diese Höhe gleich der Länge einer Seitenkante. Wenn nun die Grundfläche eines geraden Prismas ein Vieleck ist, dessen Seiten wir mit s', s'', s''' u. s. w. bezeichnen wollen, und wenn die Höhe dieses Prismas h ist, so ist der Inhalt der ersten Seitenfläche $s'h$, der der zweiten $s''h$, der der dritten $s'''h$ u. s. w. Die Gesammtoberfläche aller Seitenflächen des geraden Prismas ist demnach $s'h + s''h + s'''h$ rc., oder es ist

$$O = h(s' + s'' + s''' + \text{rc.}),$$

wenn wir mit O den Gesammtflächeninhalt aller Seitenflächen bezeichnen. Nun ist aber das, was in der Klammer steht, der Umfang der Grundfläche, den wir mit u bezeichnen wollen, es ist also auch

$$O = hu,$$

das heißt in Worten: man findet den Gesammtinhalt aller Seitenflächen eines geraden Prismas, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Prismas multiplicirt.

Aufgaben zu §. 57.

1. Die Seite eines Würfels ist 7^{cm}; wie groß ist seine Oberfläche?

2. Die Oberfläche eines Würfels ist 10,14 □″, wie groß ist die Kante desselben?

3. Wie groß ist die Gesammtoberfläche eines geraden Prismas, welches 9^{cm} hoch, dessen Grundfläche aber ein Rechteck von 12^{cm} Länge und 7^{cm} Breite ist?

4. Die Höhe einer regelmäßigen geraden fünfseitigen Säule ist 6 Fuß, eine Seite der Grundfläche ist 2′ 3″ (Duodecimalmaaß); wie groß ist der Gesammtinhalt aller Seitenflächen?

5. Die Gesammtoberfläche einer geraden quadratischen Säule (d. h. einer Säule, deren Basis ein Quadrat ist) beträgt 120 $□^{cm}$; die Seite der Basis beträgt 5^{cm}; wie groß ist die Höhe dieser Säule?

6. Die Basis einer geraden Ecksäule ist ein gleichseitiges Dreieck von 6″ Seite; die Höhe der Ecksäule ist 8″; wie groß ist die Gesammtoberfläche?

7. Eine gerade Ecksäule von 15^{cm} Höhe hat zur Basis ein reguläres Sechseck von 3^{cm} Seite; wie groß ist die Gesammtoberfläche dieser Ecksäule?

8. Die Diagonale eines Langwürfels zu berechnen, wenn die Kanten desselben gegeben sind.

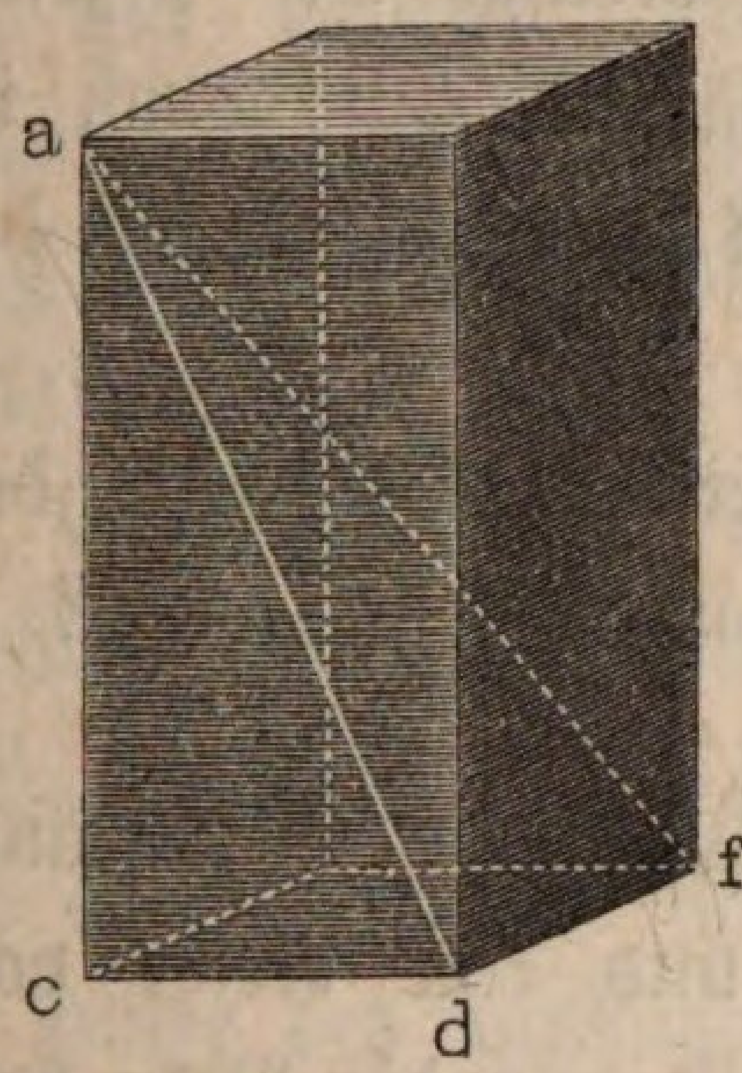
Auflösung. Bezeichnen wir die Höhe ac des Langwürfels Fig. 122 mit h, seine Breite cd mit b, seine Tiefe df mit t, so haben wir

$$ad^2 = h^2 + b^2 \quad \text{. . . . . (1)}$$

Nun aber ist adf ein bei d rechtwinkeliges Dreieck, folglich

$$af^2 = ad^2 + df^2;$$

Fig. 122.



setzen wir für ad^2 seinen Werth bei (1), für df seinen Werth t, für die Diagonale af den Werth d, so kommt

$$d^2 = h^2 + b^2 + t^2 \quad \text{. . . . . . . (2)}$$

Für einen Würfel, dessen Seitenlänge s ist, haben wir $h = b = t = s$, mithin auch

$$d^2 = 3\,s^2 \quad \text{. . . . . (3)}$$

oder

$$s^2 = \frac{d^2}{3} \quad \text{. . . . . (4)}$$

Es sei für einen Langwürfel $h = 7''$, $b = 3''\ 7'''$ (Duodecimal maaß) und $t = 4''\ 5'''$; wie groß ist die Diagonale dieses Langwürfels? (nach Gleichung 2).

Die Seite eines Würfels sei 5^{cm}; wie groß ist seine Diagonale? (nach Gleichung 3).

Die Diagonale eines Würfels sei 5^{cm}; wie groß ist jede seiner Kanten? (nach Gleichung 4).

9. Die Gesammtoberfläche eines Würfels soll 100 Quadratzoll sein; wie groß ist jede seiner Kanten, wie groß seine Diagonale?

10. Die Diagonale eines Würfels sei $7''$; wie groß ist der Inhalt einer Seitenfläche?

Die Oberfläche der Cylinder. Da man die Cylinder als 58
Ecksäulen von unendlich vielen Seiten betrachten kann, so findet man den Inhalt der Mantelfläche eines geraden Cylinders, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Cylinders multiplicirt.

Bezeichnen wir mit r den Radius des Kreises, welcher die Grundfläche bildet, so ist $2\pi r$ der Umfang dieses Kreises, und demnach ist

$$O = 2\pi r h,$$

wenn O der Inhalt der Mantelfläche und h die Höhe des geraden Cylinders bezeichnet.

die Elemente des Würfels: Seite = 1, Diagonale der Fläche = $\sqrt{2}$; Diagonale des Würfels = $\sqrt{3}$

Um die Gesammtoberfläche eines Cylinders zu finden, muß man zu der Mantelfläche noch den Inhalt des obern und des untern Kreises hinzufügen.

Aufgaben.

1. Der Durchmesser eines geraden Cylinders beträgt 27^{cm}, seine Höhe 52^{cm}. Wie groß ist der Inhalt der Mantelfläche? Wie groß ist der Flächeninhalt des obern und des untern Kreises? Wie groß ist die Gesammtoberfläche?

2. Die Gesammtoberfläche eines Cylinders beträgt $196 \square^{cm}$, der Durchmesser seines Grundkreises beträgt 8^{cm}; wie groß ist seine Höhe?

59 **Oberfläche der Pyramiden.** Eine jede Pyramide ist begränzt durch ein Vieleck, welches die Grundfläche bildet, und eine Reihe von Seitenflächen, welche sämmtlich Dreiecke sind. Hier ist nur die Rede von geraden, regelmäßigen Pyramiden; ihre Grundfläche ist ein regelmäßiges Vieleck, dessen Inhalt auf die bekannte Weise gefunden wird. Die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide sind lauter einander gleiche, gleichschenkelige Dreiecke.

Fig. 123.

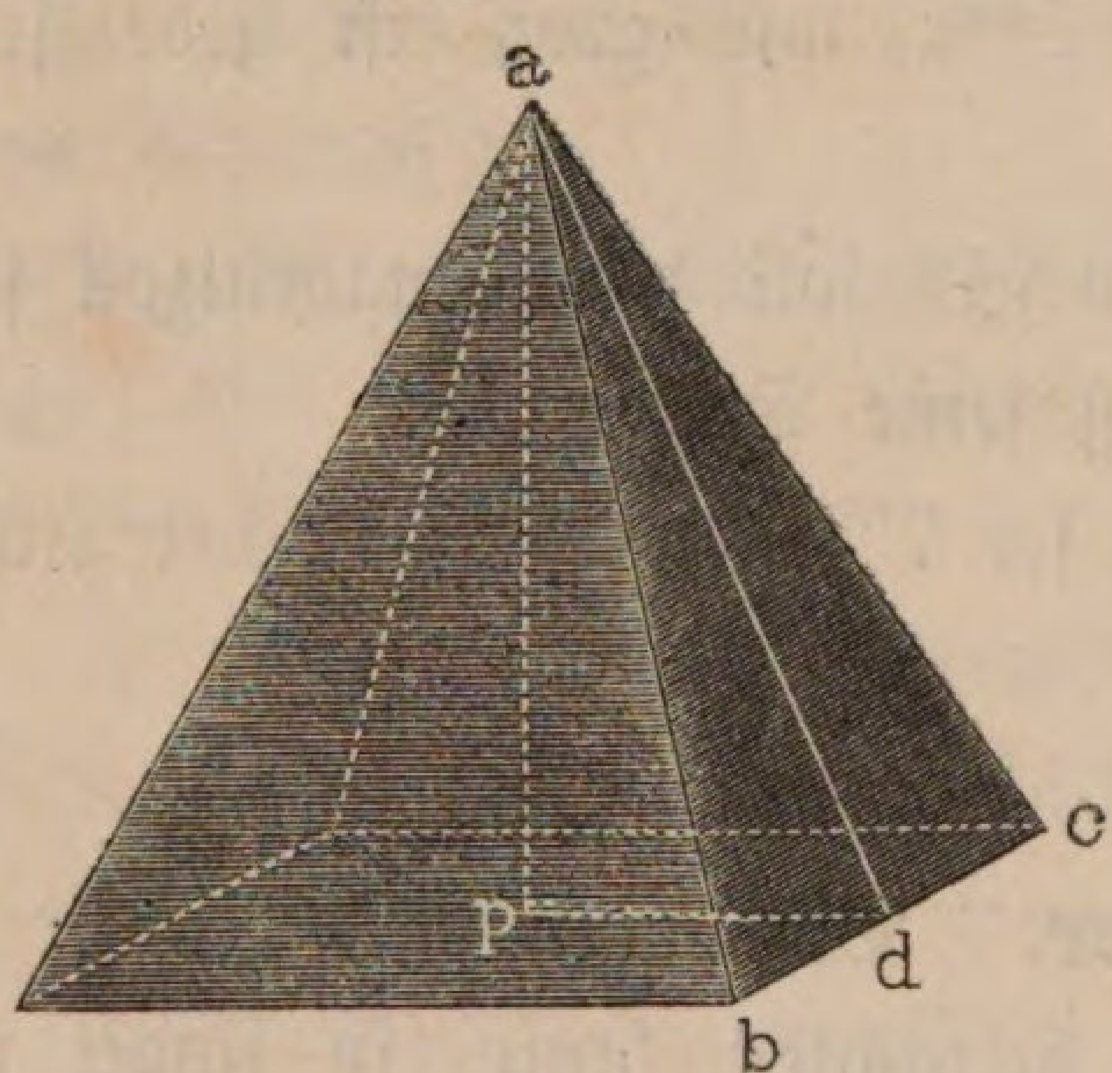
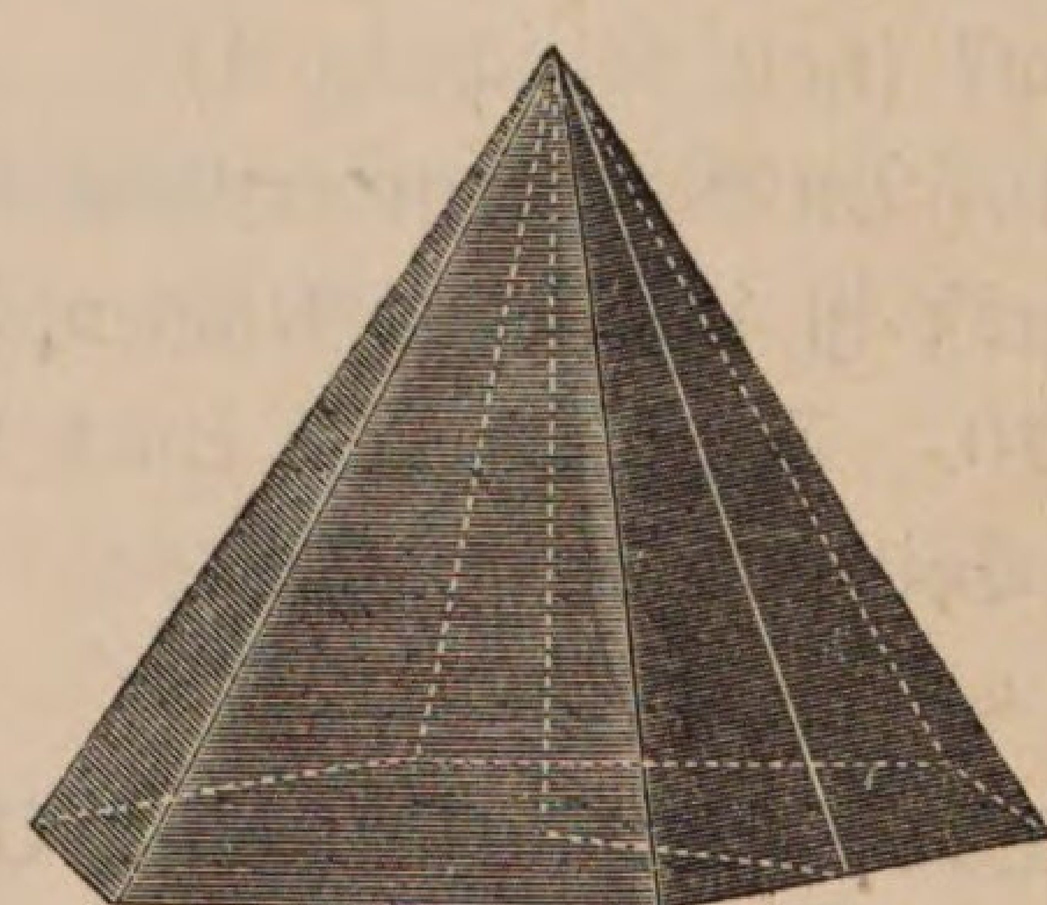


Fig. 124.



Bezeichnen wir mit s die Länge einer Grundkante bc einer regelmäßigen Pyramide, mit l die Länge des von der Spitze a auf diese Grundkante gefällten Perpendikels ad, so hat man bekanntlich für den Flächeninhalt J des Dreiecks abc

$$J = \frac{ls}{2}.$$

Ist nun ferner n die Seitenzahl der Grundfläche, so ist der Gesammtinhalt O aller Seitendreiecke der Pyramide

$$O = \frac{n.s.l}{2}.$$

Da nun aber ns der Umfang der Grundfläche ist, den wir mit u bezeichnen wollen, so ist auch

$$O = \frac{u.l}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

oder mit Worten: man findet den Inhalt aller Seitendreiecke einer geraden, regelmäßigen Pyramide, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der halben Höhe eines Seitendreiecks multiplicirt.

Gewöhnlich ist die Höhe ad des Seitendreiecks nicht unmittelbar gegeben; dagegen kennt man entweder die Länge der Seitenkanten (also z. B. ab in Fig. 123) oder die Höhe der Pyramide (ap in Fig. 123) Aus diesen Angaben läßt sich alsdann leicht die Höhe l (ad in Fig. 123) mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes berechnen.

Aufgaben.

1. Die Basis einer geraden Pyramide sei ein Quadrat, dessen Seite 3″ beträgt; die verticale Höhe der Pyramide (ap Fig. 123) sei 4″; wie groß ist die Gesammtoberfläche der Pyramide?

2. Die Seite der Basis einer geraden quadratischen Pyramide sei 7^{cm}, die Seitenkante (ab Fig. 123) sei 12^{cm}; wie groß ist die Gesammtoberfläche der Pyramide?

3. Die Basis einer regelmäßig dreiseitigen Pyramide hat einen Umfang von 12″, die Länge einer Seitenkante beträgt 3″; wie groß ist ihre Gesammtoberfläche?

4. Jede Grundkante einer regelmäßig dreiseitigen Pyramide hat eine Länge von 6″; die verticale Höhe dieser Pyramide sei 5″; wie groß ist ihre Gesammtoberfläche?

5. Die Grundkante einer regelmäßig sechsseitigen Pyramide sei 6″, ihre Höhe sei 8″; wie groß ist ihre Gesammtoberfläche?

Die Oberfläche gerader Kegel läßt sich nach den im vorigen 60
Paragraphen erläuterten Principien berechnen; man hat nur in die Gleichung (1) auf Seite 102 für u den Umfang des Grundkreises, für l die Länge der Linie sb (Fig. 125 a. f. S.) zu setzen, die man von der Spitze s zu irgend einem Punkte b des Umfanges der Grundfläche ziehen kann.

Ist r der Radius des Grundkreises, so ist $2\pi r$ sein Umfang. Bezeichnen wir mit h die Höhe sp des Kegels, so ist $sb = \sqrt{\overline{sp}^2 + \overline{pb}^2}$, oder $l = \sqrt{h^2 + r^2}$. Der Flächeninhalt der Mantelfläche eines geraden Kegels ist demnach

$$0 = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aufgaben.

1. Der Radius der Basis eines geraden Kegels sei 2^{cm}, seine Höhe sei 3^{cm}; wie groß ist der Inhalt seiner Mantelfläche? Wie groß ist der Flächeninhalt der Basis?

2. Die Mantelfläche eines geraden Kegels, welcher 7″ hoch ist, hat einen Flächeninhalt von 25 Quadratzollen; wie groß ist der Radius des Grundkreises?

Fig. 125.

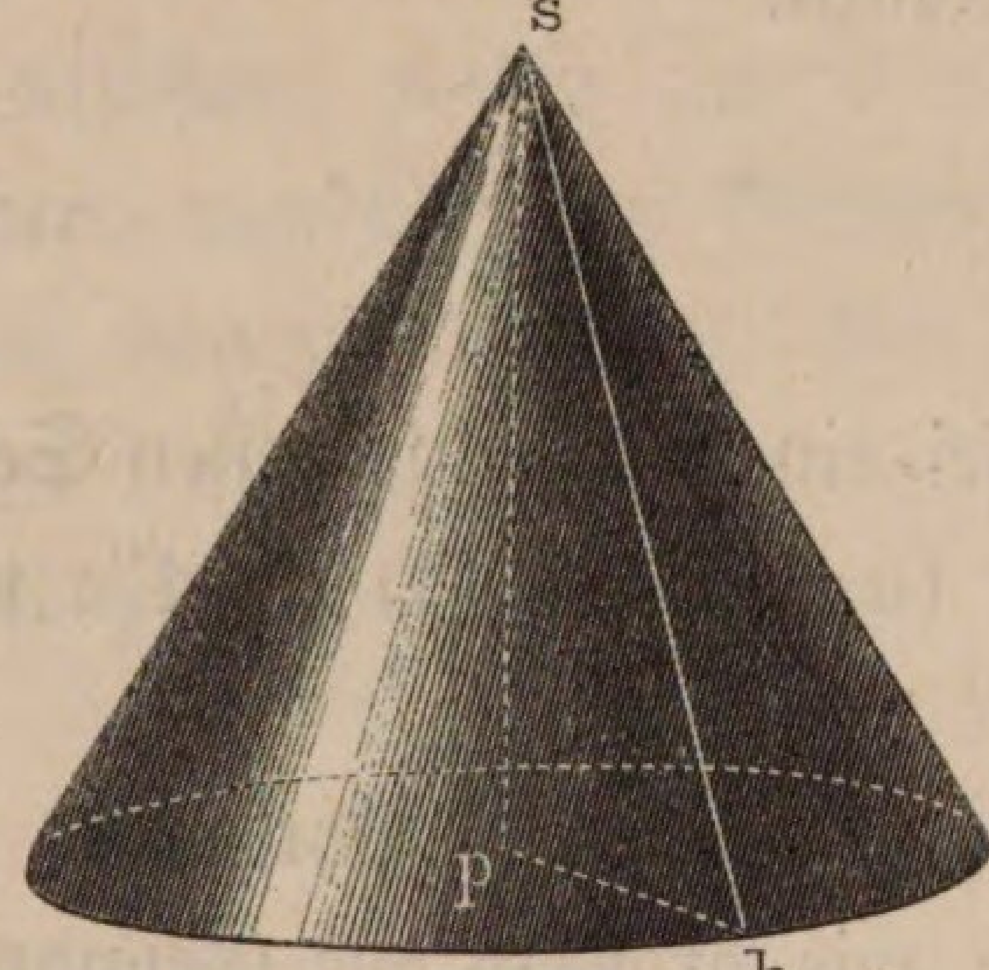
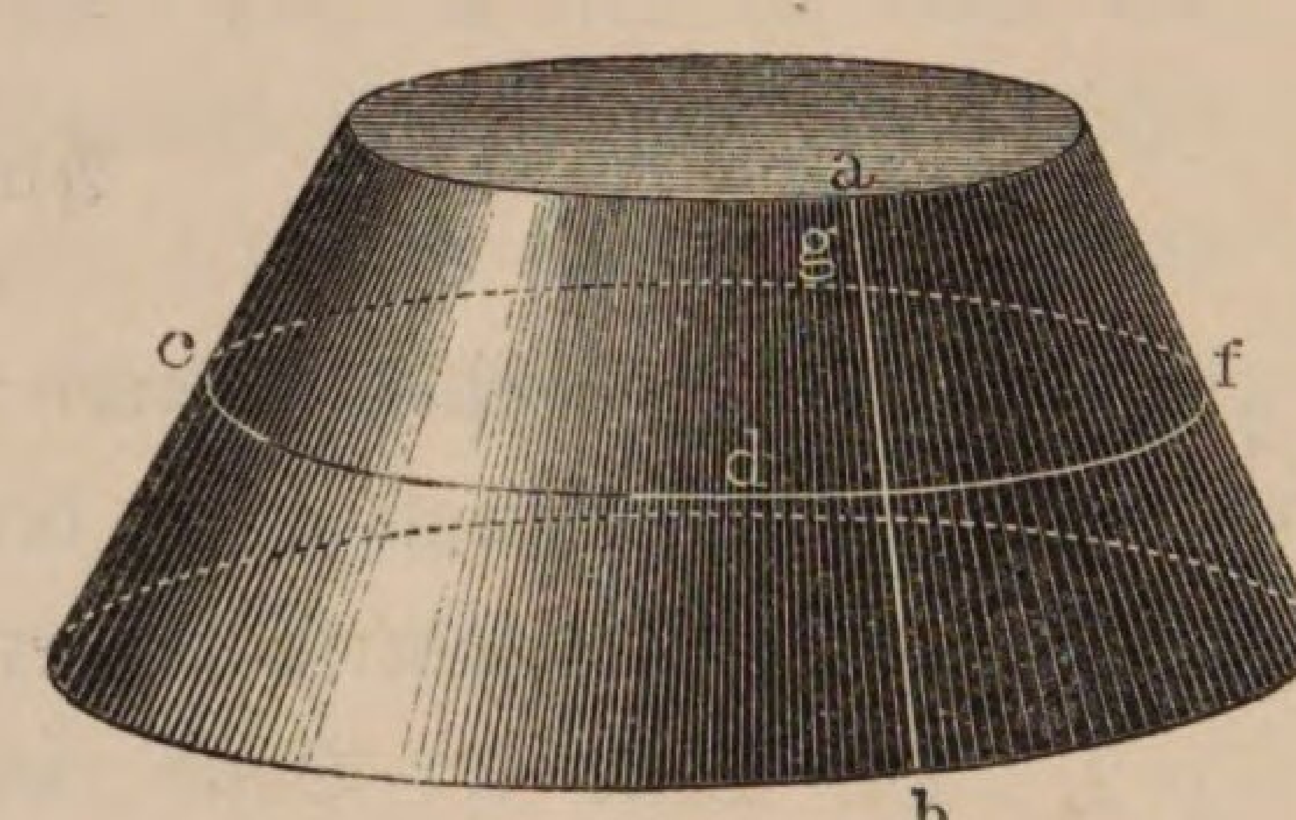


Fig. 126.



61 **Die Oberfläche eines abgestumpften geraden Kegels,** Fig. 126, kann als ein Paralleltrapez betrachtet werden, dessen parallele Seiten durch den Umfang des obern und des untern Kreises gebildet werden, und dessen Höhe gleich ist der Seite ab des abgestumpften Kegels.

Bezeichnen wir mit R den Radius des untern, mit r den Radius des obern Kreises, Fig. 126, mit s die Länge ab des abgestumpften Kegels, so ist demnach der Flächeninhalt seiner Mantelfläche

$$J = 2\pi \left(\frac{R + r}{2}\right) s.$$

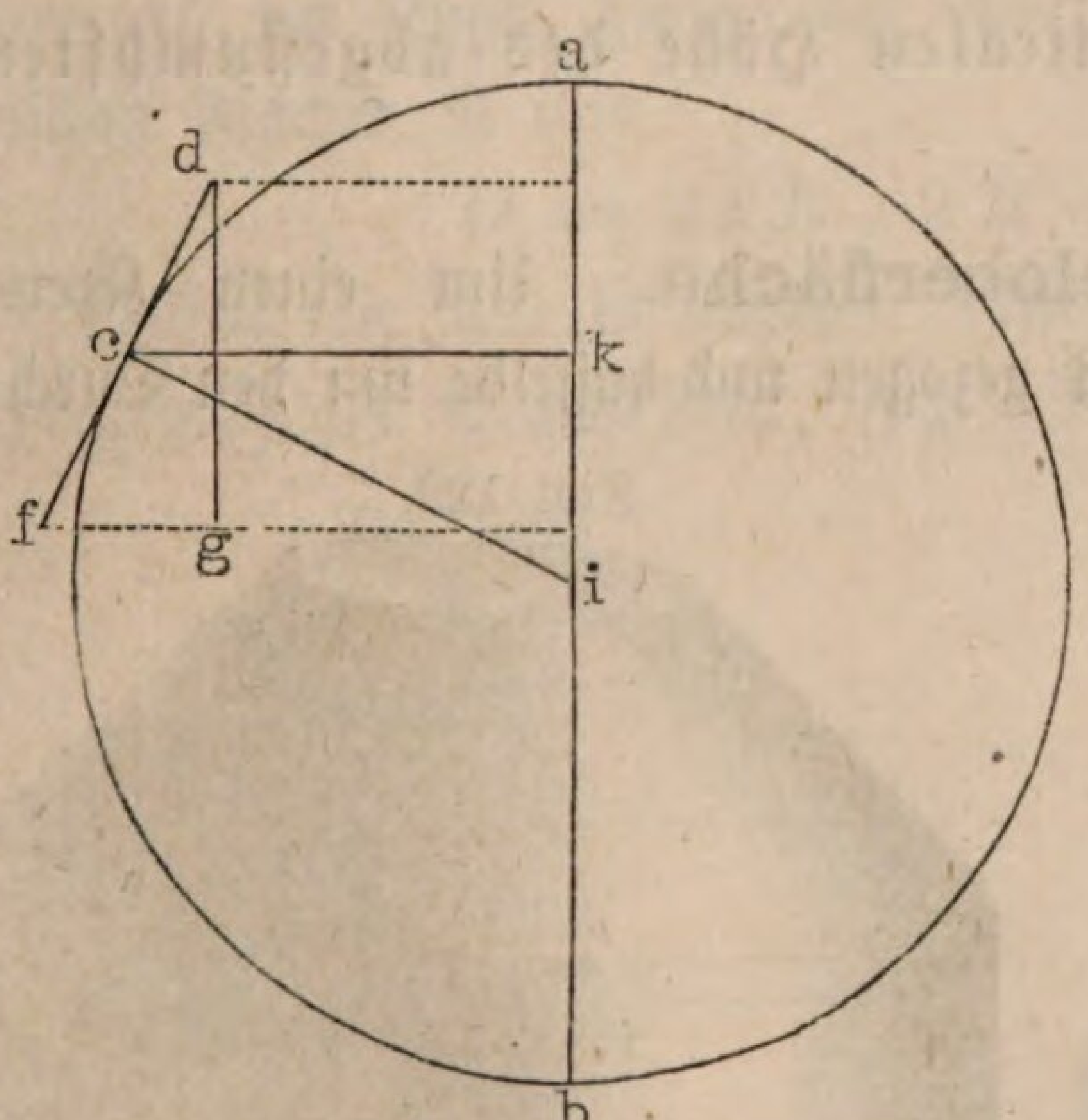
Nun ist aber $\frac{R + r}{2}$ auch der Radius eines Kreises, welcher in der Mitte zwischen dem obern und dem untern um die Kegelfläche herumläuft, und welchen wir als Mittelkreis bezeichnen wollen. In Fig. 126 ist $cdfg$ der Mittelkreis.

Man kann demnach sagen: die Oberfläche des Mantels eines abgestumpften geraden Kegels wird gefunden, wenn man den Umfang seines Mittelkreises mit der Seitenlänge des abgestumpften Kegels multiplicirt.

An einem abgestumpften Kegel sei der Radius des untern Kreises 4″, der des obern 3″, die Seite *ab* aber 3,5″; wie groß ist die Mantelfläche dieses abgestumpften Kegels?

Beziehungen des abgestumpften Kegels zu der Kugel, welche ihn in seinem Mittelkreise berührt. 62 Denken wir uns den Kreis Fig. 127 um die Axe *ab* umgedreht, so entsteht durch die Bewegung der Kreislinie offenbar eine Kugeloberfläche. Es sei nun in irgend einem Punkte *c* des Kreises eine Tangente an denselben gezogen, und auf dieser von *c* aus nach beiden Seiten gleiche Längen *cf* und *cd* abgeschnitten, so entsteht durch die Umdrehung der Linie *df* um die Axe *ab* die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels, welche von der erwähnten Kugel in ihrem Mittelkreise berührt wird.

Fig. 127.



Denken wir uns nun in Fig. 127 von *c* ein Perpendikel *ck* auf die Umdrehungsaxe gefällt, so ist dies der Radius des Mittelkreises für die fragliche Kegelfläche, den wir mit *r* bezeichnen wollen. Der Flächeninhalt dieser Mantelfläche ist nach Obigem

$$J = 2\pi r s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wenn mit *s* die Länge *df* bezeichnet wird.

Fällt man nun ferner von *d* auf eine durch *f* mit *ck* parallel gezogene Linie ein Perpendikel *dg*, welches nichts anderes ist als die verticale Höhe des abgestumpften Kegels, die wir mit *h* bezeichnen wollen, zieht man ferner den Radius *ci*, dessen Länge durch *R* bezeichnet werden soll, so entstehen die ähnlichen Dreiecke *dfg* und *cik*, aus welchen sich folgende Proportion ergiebt:

$$dg : fd = ck : ci$$

oder

$$h : s = r : R$$

und daraus

$$s \cdot r = h \cdot R.$$

Wir können also in Gleichung (1) für rs das Product Rh setzen, ohne daß der Werth von J geändert wird, und haben also

$$J = 2\pi Rh \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nun ist aber $2\pi R$ der Umfang der Kugel, welche den abgestumpften Kegel in seinem Mittelkreise berührt, und h ist die verticale Höhe des abgestumpften Kegels; die Gleichung (2) läßt sich also in Worten so ausdrücken:

Die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels hat gleichen Flächeninhalt mit der Mantelfläche eines Cylinders, dessen Durchmesser so groß ist wie der Durchmesser der Kugel, welche den abgestumpften Kegel in ihrem Mittelkreise berührt, und dessen Höhe gleich ist der verticalen Höhe des abgestumpften Kegels.

63 **Berechnung der Kugeloberfläche.** Um einen Kreis, Fig. 128, sei ein regelmäßiges Achteck gezogen und dasselbe um den Durchmesser ab umgedreht, welcher die Mittelpunkte zweier paralleler Seiten des Achtecks mit einander verbindet, so entsteht durch die Umdrehung des Kreises eine Kugel; durch die Umdrehung der Achtecksseiten aber der Körper, welcher Fig. 129 perspectivisch dargestellt ist.

Fig. 128.

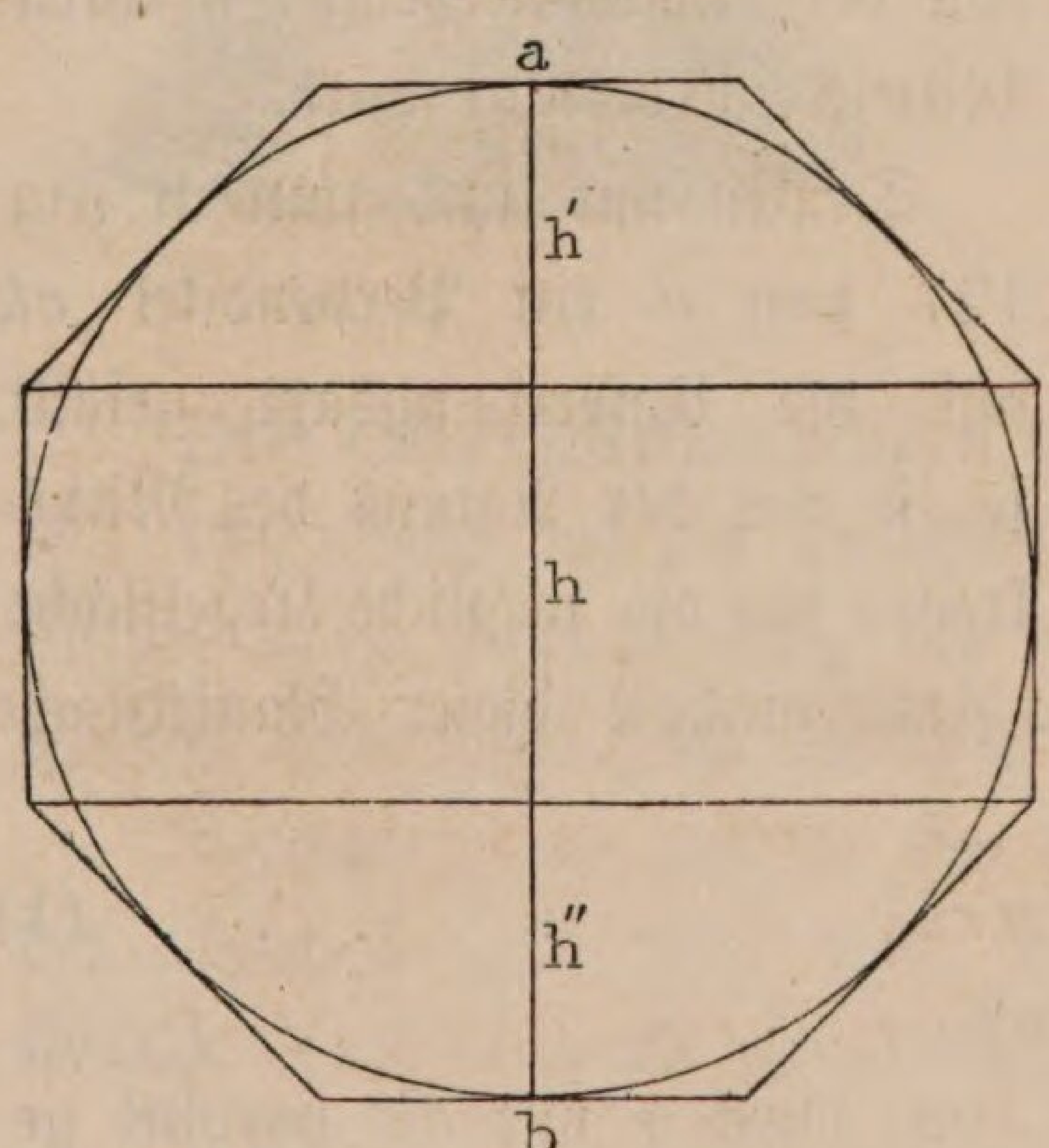
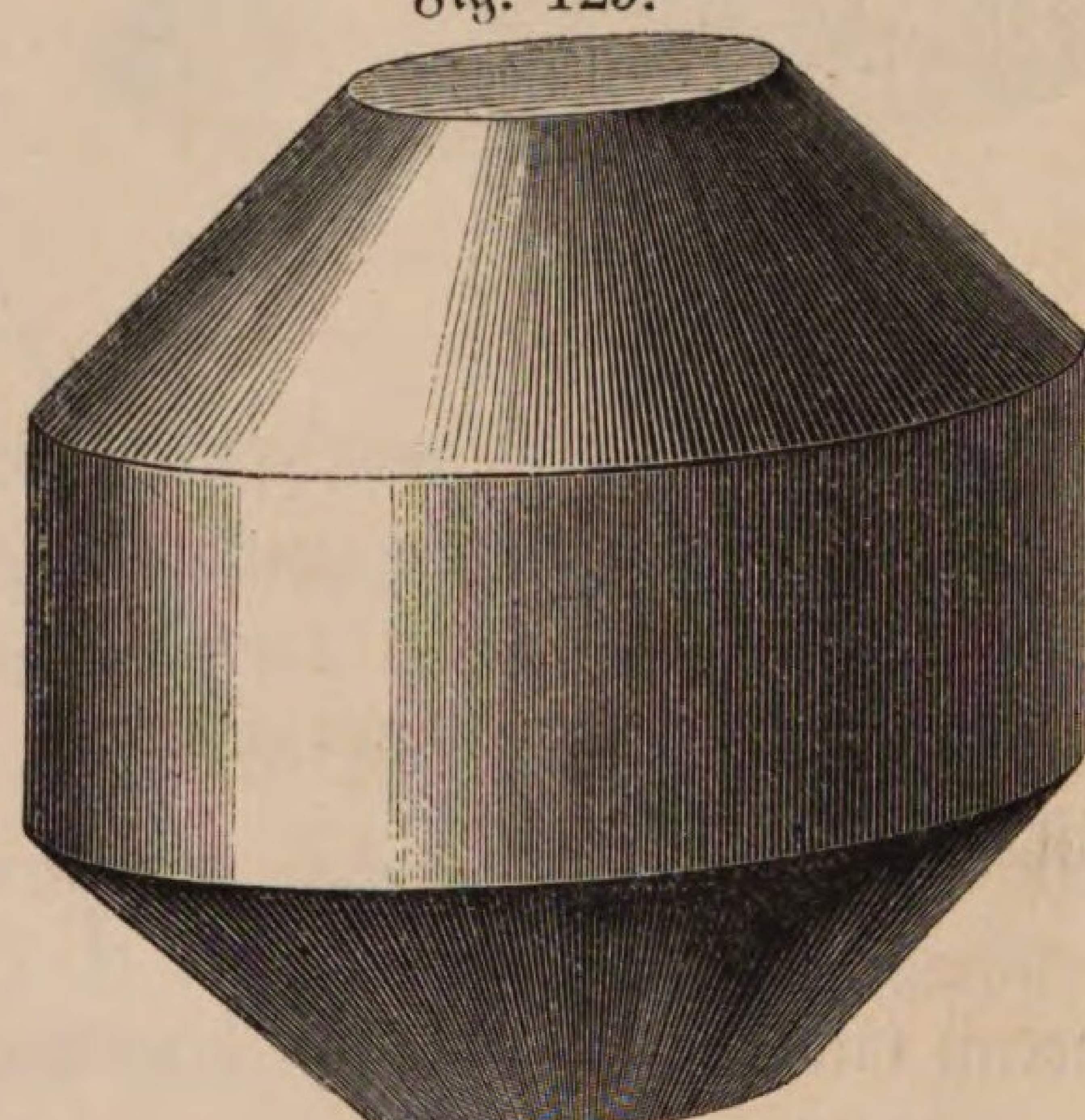


Fig. 129.



Diesen Körper können wir uns in drei Theile zerlegt denken. Der

mittlere ist ein Cylinder, welcher mit der Kugel gleichen Radius R hat, dessen Höhe wir aber mit h bezeichnen wollen; die Mantelfläche dieses Cylinders hat also den Inhalt

$$2\pi Rh.$$

An diesen Cylinder setzt sich oben und unten ein abgestumpfter Kegel an, welcher von der Kugel in seinem Mittelkreise berührt wird, und dessen Höhe wir mit h' bezeichnen wollen. Die Mantelfläche jeder dieser abgestumpften Kegelflächen ist:

$$2\pi Rh'.$$

Die Oberfläche O der mittleren Cylinderfläche und der beiden sich an dieselbe ansetzenden abgestumpften Kegelflächen zusammen genommen ist also

$$O = 2\pi R(h' + h + h').$$

Die Summe der Höhen $h' + h + h'$ ist aber offenbar dem Durchmesser ab der Kugel gleich; der Gesammtinhalt jener cylindrischen und conischen Flächen ist also

$$O = 2\pi R \,.\, 2R = 4\pi R^2.$$

Denken wir uns in gleicher Weise um einen Kreis vom Radius R ein regelmäßiges Sechszehneck, Fig. 130, gezogen und dasselbe um den

Fig. 130.

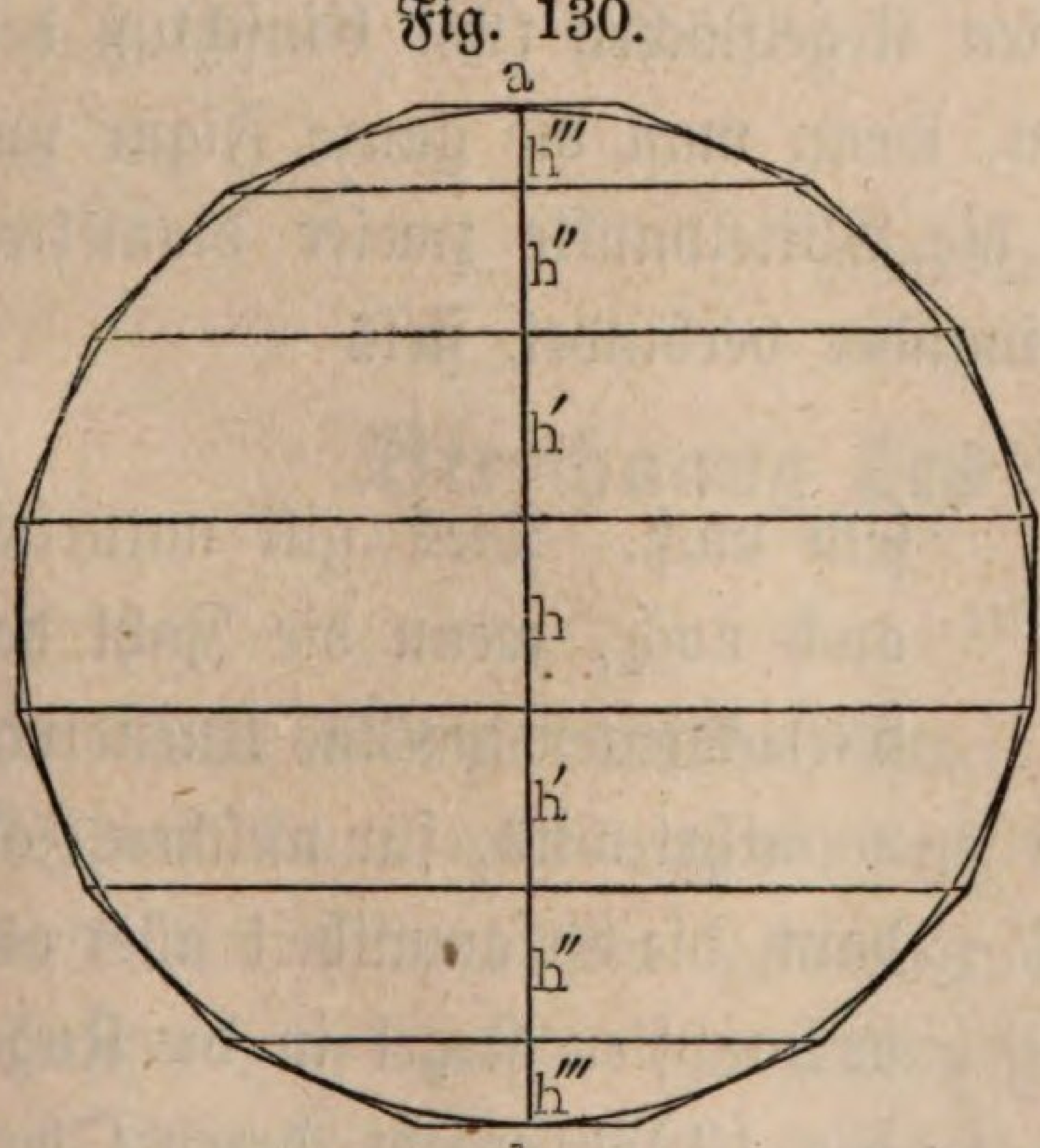
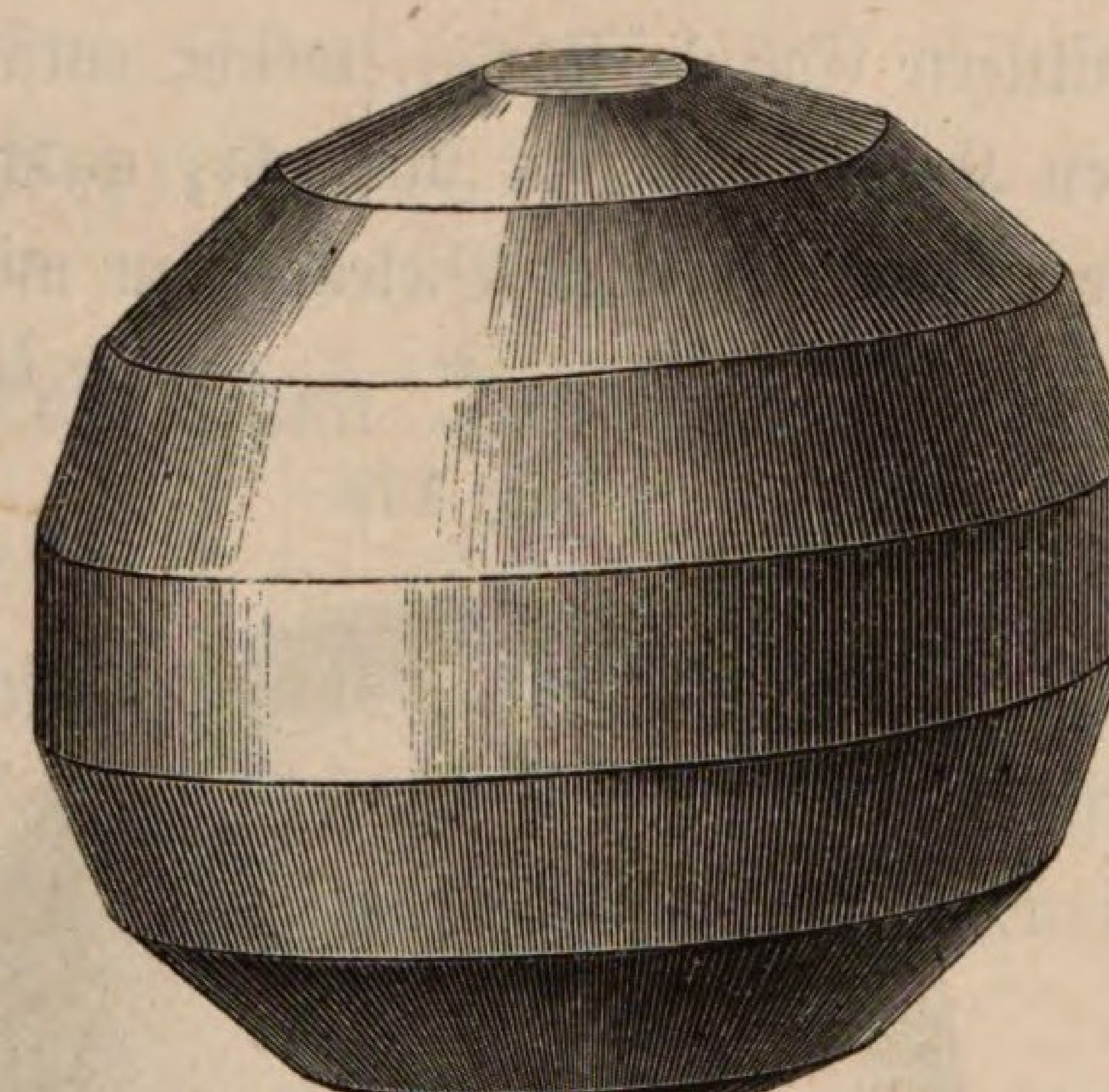


Fig. 131.



Kugeldurchmesser ab umgedreht, so entsteht der Rotationskörper Fig. 131, welcher durch eine mittlere Cylinderfläche und sechs abgestumpfte Kegelflächen gebildet wird, von denen je zwei einander gleich sind, und welche sämmtlich von der durch die Umdrehung des Kreises gebildeten Kugel in ihrem Mittelkreise berührt werden. Bezeichnen wir mit h die Höhe der

mittleren Cylinderfläche, mit h', h'' und h''' die Höhe der nach oben und nach unten der Reihe nach folgenden abgestumpften Kegel, so ist die Oberfläche derselben von oben anfangend der Reihe nach

$$2\pi Rh'''$$
$$2\pi Rh''$$
$$2\pi Rh'$$
$$2\pi Rh$$
$$2\pi Rh'$$
$$2\pi Rh''$$
$$2\pi Rh''',$$

also der Gesammtinhalt aller dieser Rotationsflächen

$$2\pi R(h''' + h'' + h' + h + h' + h'' + h''').$$

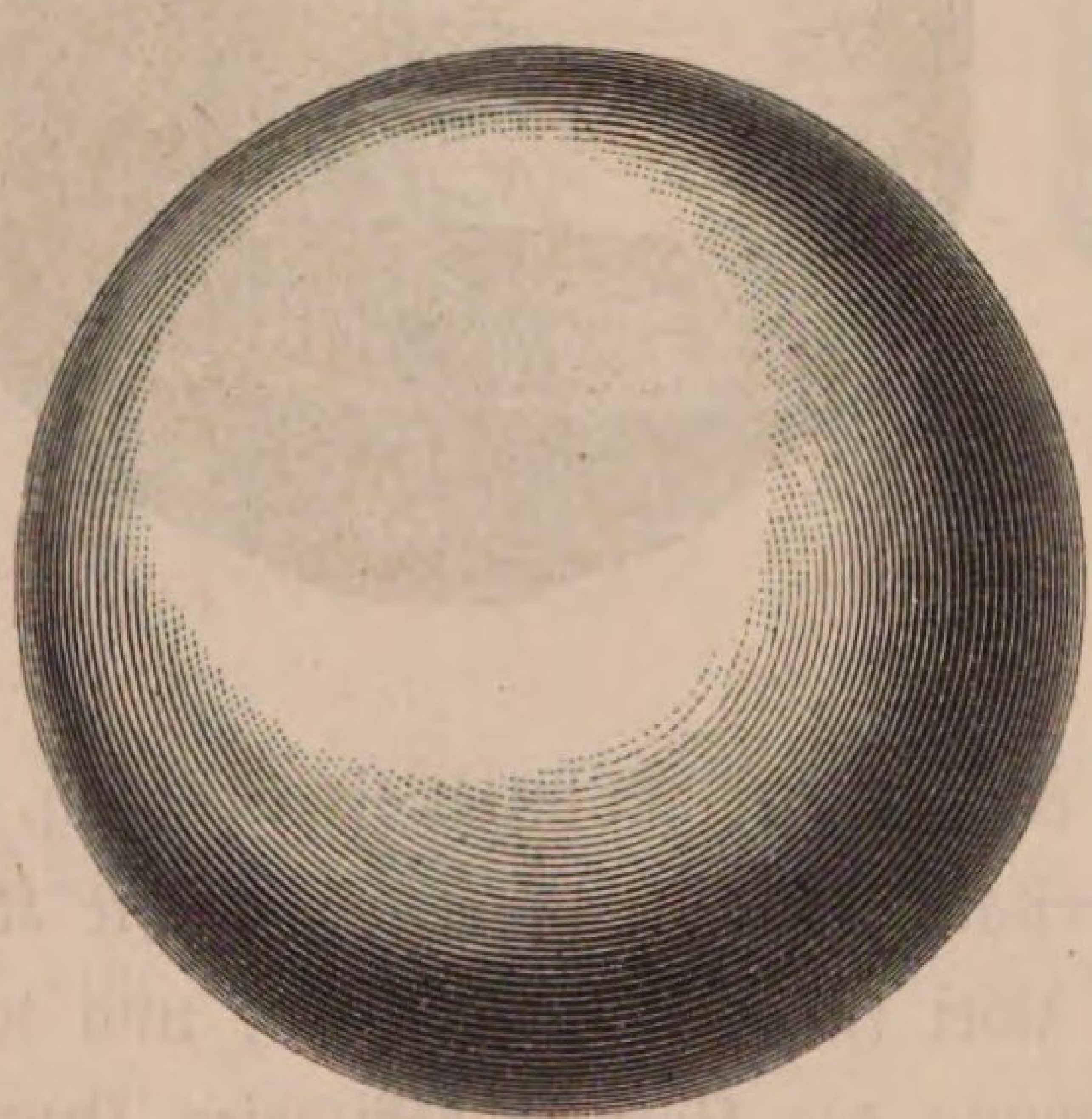
Die Summe der in den Klammern stehenden Höhen ist aber nichts anderes als der Durchmesser des Kreises Fig. 130, also $2R$, mithin ist die Gesammtoberfläche des Rotationskörpers Fig. 131 (mit Ausschluß des oben und unten begränzenden Kreises) ebenfalls

$$O = 4\pi R^2.$$

Wir können auf dieselbe Weise fortschließen, daß, wie man auch die Seitenzahl des um den Kreis beschriebenen Vielecks vermehren möge, doch die Gesammtoberfläche aller abgestumpften Kegelflächen (mit Einschluß der mittlern Cylinderfläche), welche entstehen, wenn man die ganze Figur um den Kreisdurchmesser umdreht, welcher die Mittelpunkte zweier diametral gegenüber liegender Vielecksseiten mit einander verbindet, stets

$$4\pi R^2$$

Fig. 132.



sein muß. Dies gilt natürlich auch noch, wenn die Zahl der Vielecksseiten bis ins Unendliche vermehrt wird, für welchen Fall dann die Gesammtheit aller abgestumpften Kegel in die Kugel Fig. 132 übergeht, deren Oberfläche demnach gleichfalls

$$O = 4\pi R^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, wenn R den Radius derselben bezeichnet.

$4\pi R^2$ ist aber auch die Mantelfläche eines Cylinders,

dessen Durchmesser $2R$ und dessen Höhe $2R$ ist; wir können deshalb auch sagen: Die Oberfläche einer Kugel ist gleich der Mantelfläche eines Kegels, welcher mit der Kugel gleichen Durchmesser und gleiche Höhe hat.

Aufgaben.

1. Der Radius einer Kugel sei 3″ oder 5^{cm} oder 13′; wie groß ist ihre Oberfläche?
2. Der Durchmesser der Erde ist gleich 1720 deutsche Meilen; wie viel Quadratmeilen beträgt ihre Oberfläche?
3. Der Durchmesser des Mondes verhält sich zu dem der Erde wie 3 zu 11; in welchem Verhältniß steht die Oberfläche des Mondes zur Oberfläche der Erde?
4. Die Oberfläche einer Kugel soll 3 □Meter betragen; wie groß muß ihr Radius sein?
5. Wie viel Zoll ist der Radius einer Kugel, deren Oberfläche 1 Quadratfuß alt pariser Maaß ist?

Zweites Kapitel.

Berechnung des körperlichen Inhalts.

Die Körpereinheiten. Den Rauminhalt, das Volumen eines Körpers kann man nur dadurch bestimmen, daß man ermittelt, wie oftmals ein Körper von bekannter Größe, den man als Körpereinheit annimmt, in demselben enthalten ist. 64

Als Raumeinheit nimmt man den Würfel (Cubus), dessen Kante gleich ist der Längeneinheit. Es giebt demnach ebenso viel verschiedene Körpereinheiten, als es Längeneinheiten giebt. Fig. 133 (a. f. S.) stellt einen preußischen Kubikzoll, Fig. 134 eine preußische Kubiklinie und Fig. 135 ein Kubikcentimeter dar.

Wenn man die Längendimensionen eines Langwürfels kennt, so ist es leicht, seinen Körperinhalt (Kubikinhalt) zu berechnen. Es sei z. B.

der Langwürfel, Fig. 136, $5'''$ breit, $8'''$ dick und $12'''$ hoch, so ist seine Grundfläche offenbar $5 \times 8 = 40$ Quadratlinien, und auf diese Grund-

Fig. 133.

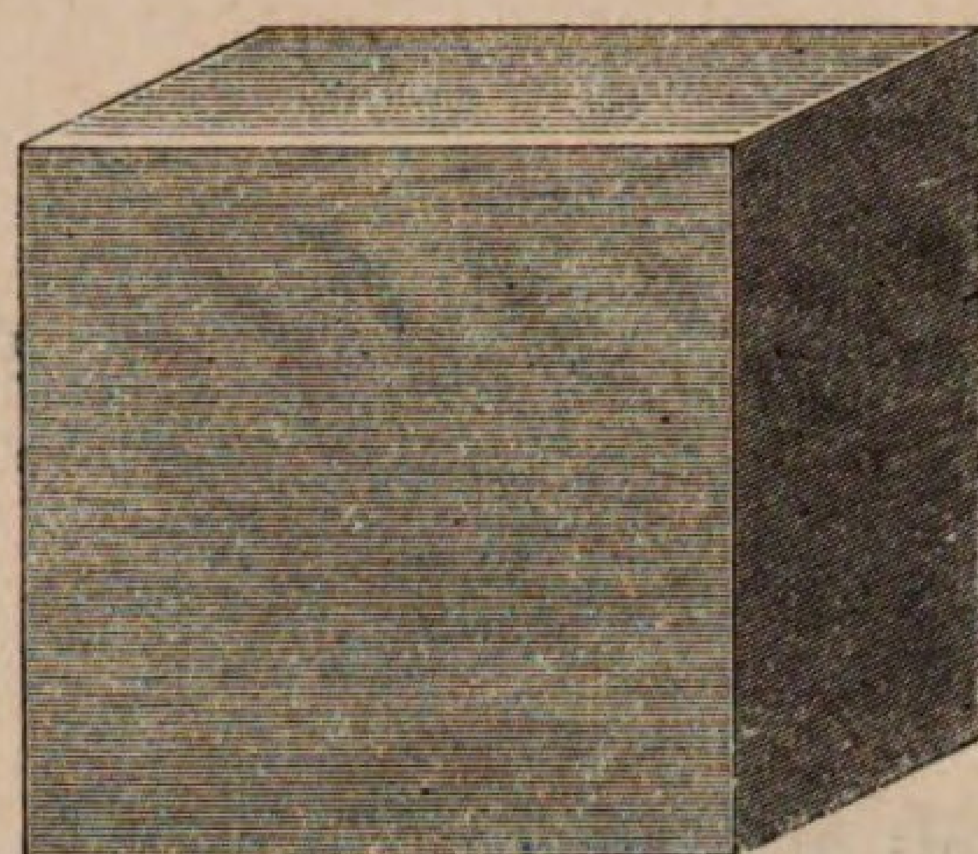


Fig. 134.



Fig. 135.

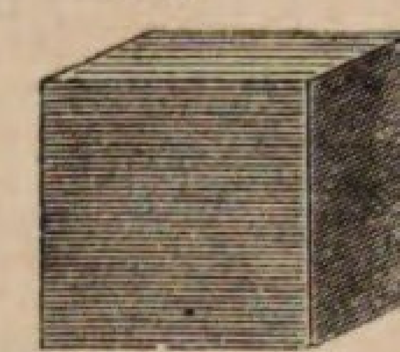


Fig. 137.

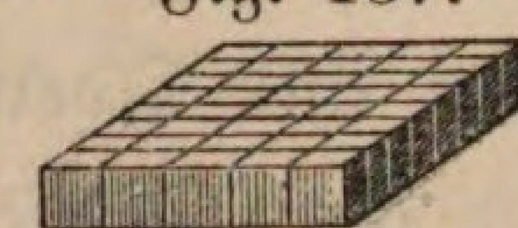
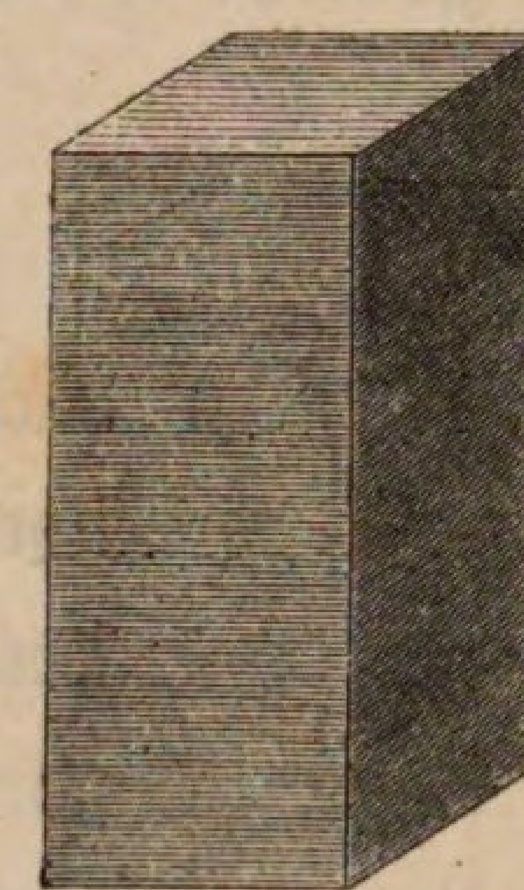


Fig. 136.



fläche kann man also 40 Würfelchen aufsetzen, deren Seite $1'''$ ist, wie dies Fig. 137 anschaulich macht. Solcher, 40 Kubiklinien enthaltender, $1'''$ hoher Lagen muß man aber 12 aufeinander setzen, um einen dem Langwürfel Fig. 136 gleichen Körper zu erhalten; der Inhalt desselben ist also

$$5 \times 8 \times 12 = 480 \text{ Kubiklinien.}$$

Bezeichnet man allgemein die drei Dimensionen eines Langwürfels mit a, b und c, so ist also sein körperlicher Inhalt (sein Volumen)

$$V = a \times b \times c.$$

Wenden wir das auf die Inhaltsberechnung eines Würfels an, dessen Seitenlänge gleich a ist, so haben wir für diesen auch $b = a$ und $c = a$, folglich ist der körperliche Inhalt dieses Würfels

$$V = a \times a \times a = a^3.$$

Man findet also den körperlichen Inhalt eines Würfels, wenn man die Seitenlänge in die dritte Potenz erhebt.

Der körperliche Inhalt eines Würfels, dessen Kanten 4 Centimeter lang sind, ist demnach

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64 \text{ Kubikcentimeter.}$$

Die körperlichen Inhalte verschiedener Würfel verhalten sich demnach wie die dritten Potenzen ihrer Seitenlängen. Wenn die Seite eines Würfels 2-, 3-, 4mal so groß wird, so wird sein Inhalt 8-, 27-, 64mal größer.

Die verschiedenen Kubikeinheiten verhalten sich demnach auch wie die dritten Potenzen der entsprechenden Längeneinheiten.

Es ist demnach:

$$1^{\text{cub met}} = 1000^{\text{cub decimet}}$$
$$1^{\text{cub dm}} = 1000^{\text{cub centimet}}$$
$$1^{\text{cub cm}} = 1000^{\text{cub millim.}}$$

Ferner ist

$$1^{\text{cub}'} = 1000^{\text{cub}''}$$
$$1^{\text{cub}''} = 1000^{\text{cub}'''}$$

für zehntheiliges Fußmaaß, während für Duodecimalmaaß

$$1^{\text{cub}'} = 1728^{\text{cub}''}$$
$$1^{\text{cub}''} = 1728^{\text{cub}'''}.$$

Aufgaben.

1. Wie viel pariser Kubikfuß enthält eine Kubiktoise?
2. Wie viel Kubikcentimeter enthält ein badischer Kubikzoll?
3. Wie viel Kubikmillimeter enthält ein preußischer Kubikzoll?
4. Wie viel Kubikcentimeter sind dies?
5. In welchem Verhältniß steht ein pariser Kubikzoll zu einem preußischen?
6. In welchem Verhältniß steht der österreichische Kubikzoll zum englischen?

NB. Um diese Aufgaben zu lösen, sind die Verhältnisse der entsprechenden Längeneinheiten aus §. 3, Seite 5 und 6, zu entnehmen.

Inhaltsberechnung gerader Prismen und Cylinder. 65

Nach dem, was im vorigen Paragraphen besprochen wurde, ist es klar, daß man den kubischen Inhalt einer geraden Ecksäule findet, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt; d. h. es ist

$$V = g \times h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wenn V den kubischen Inhalt der Ecksäule, g den Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe der Säule bezeichnet.

Dieselbe Gleichung gilt auch zur Berechnung des körperlichen Inhalts (Volumens) gerader Cylinder.

Aufgaben.

1. Die Grundfläche einer geraden Ecksäule sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge 5″ beträgt; die Höhe der Ecksäule sei 12″; wie groß ist ihr Körperinhalt?

2. Die Grundfläche einer geraden Ecksäule sei ein regelmäßiges Sechseck von 7^{cm} Seitenlänge; die Höhe der Ecksäule sei 15^{cm}; wie groß ist ihr Volumen?

3. Wie groß ist der Körperinhalt einer regelmäßig achtseitigen, geraden Ecksäule, wenn jede Achtecksseite 3 Centimeter lang und die Säule 9 Centimeter hoch ist?

4. Wie groß ist der Körperinhalt eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis, wenn der Durchmesser dieser Basis $3'' \; 2'''$ preuß. und seine Höhe $5'' \; 7'''$ beträgt?

66 **Körperinhalt schiefer Ecksäulen und Pyramiden.** Um den körperlichen Inhalt V einer schiefen Ecksäule zu berechnen, hat man nur den Quadratinhalt g der Grundfläche mit der verticalen Höhe h der Säule zu multipliciren; es kommt also auch hier die Formel

$$V = gh \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

in Anwendung. Unter der verticalen Höhe einer schiefen Ecksäule, Fig. 140, versteht man aber die Länge des Perpendikels ab, welches man von irgend einem Punkte a der obern (mit der Grundfläche parallelen) Endfläche acd auf die Ebene der Grundfläche fällen kann.

Die Anwendung der Formel (1) zur Inhaltsberechnung schiefer Ecksäulen stützt sich auf den Satz, daß Ecksäulen von gleicher Grundfläche und Höhe auch gleichen Körperinhalt haben.

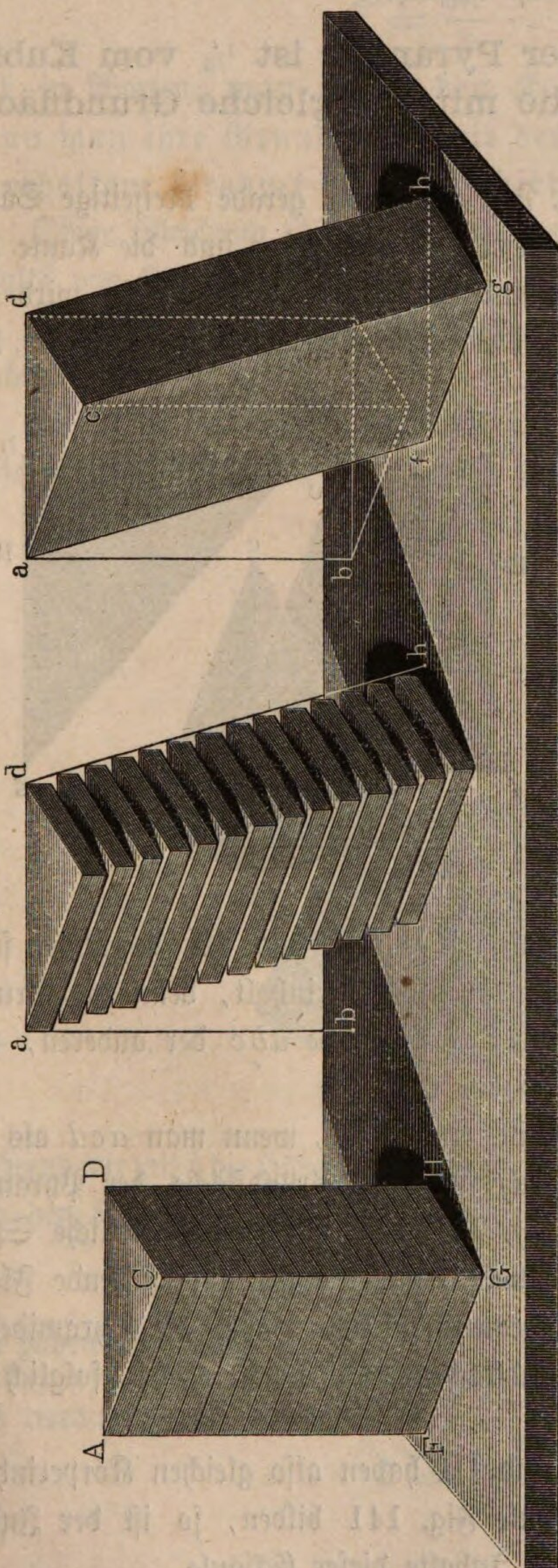
Der Beweis dieses Satzes läßt sich am einfachsten auf folgende Weise führen.

Denken wir uns irgend eine gerade Ecksäule, Fig. 138, durch gleich weit von einander abstehende, mit der Grundfläche parallele Ebenen in eine Reihe gleich hoher Scheiben zerschnitten, so lassen sich diese Scheiben in der Weise verschieben, daß die entsprechenden Ecken aller einzelnen Scheibchen, welche ursprünglich eine Kante DH der geraden Ecksäule bildeten, nun wieder in einer geraden Linie dh liegen, welche nicht mehr rechtwinkelig auf der Basis steht. Auf diese Weise entsteht ein aus treppenförmig übereinander gelegten Scheibchen zusammmengesetzter Körper, Fig. 139., welcher mit der geraden Ecksäule, Fig. 138, gleichen Körperinhalt hat, da er ja aus denselben Theilschichten besteht wie die Ecksäule, nur daß dieselben hier anders aufgebaut sind als dort.

Die Richtigkeit unseres Schlusses ist von der Höhe der einzelnen

Theilschichten vollkommen unabhängig; er bleibt richtig, wie sehr wir auch die Höhe der einzelnen Theilschichten vermindern, also auch ihre Anzahl vermehren mögen. Bei mehr und mehr abnehmender Höhe geht aber die Gesammtheit der verschobenen Theilschichten auch mehr und mehr in die schiefe Ecksäule, Fig. 140, über, welche demnach bei gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ($ab = AF$) auch gleichen Körperinhalt mit der geraden Ecksäule, Fig. 138, hat.

Fig. 138. Fig. 139. Fig. 140.



Es gilt dieser Satz natürlich ebenso für eine vierseitige, fünfseitige, sechsseitige Ecksäule, wie für eine dreiseitige, da unsere Beweisführung ja von der Seitenzahl der Basis völlig unabhängig war; er gilt mithin auch für Cylinder, d. h. der **Kubikinhalt eines schiefen Cylinders ist gleich dem Kubikinhalt eines geraden von gleicher Grundfläche und Höhe.**

Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe haben ebenfalls gleichen Körperinhalt. Die eben durch-

geführte Beweisführung läßt sich ohne Weiteres auch auf Pyramiden übertragen; es mag deshalb genügen, dies anzuführen. Der Schüler mag die Ausführung des Beweises selbst versuchen.

67 **Der Kubikinhalt einer Pyramide ist $1/3$ vom Kubikinhalt einer Ecksäule, die mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.**

Beweis. Es sei *abcdfg*, Fig. 141, eine gerade dreiseitige Säule. Denken wir uns eine Schnittfläche durch das Eck *c* und die Kante *dg*, und eine zweite durch das Eck *g* und die Kante *ac* gelegt, so wird dadurch die dreiseitige Ecksäule in drei Pyramiden getheilt, welche in Fig. 142

Fig. 141.

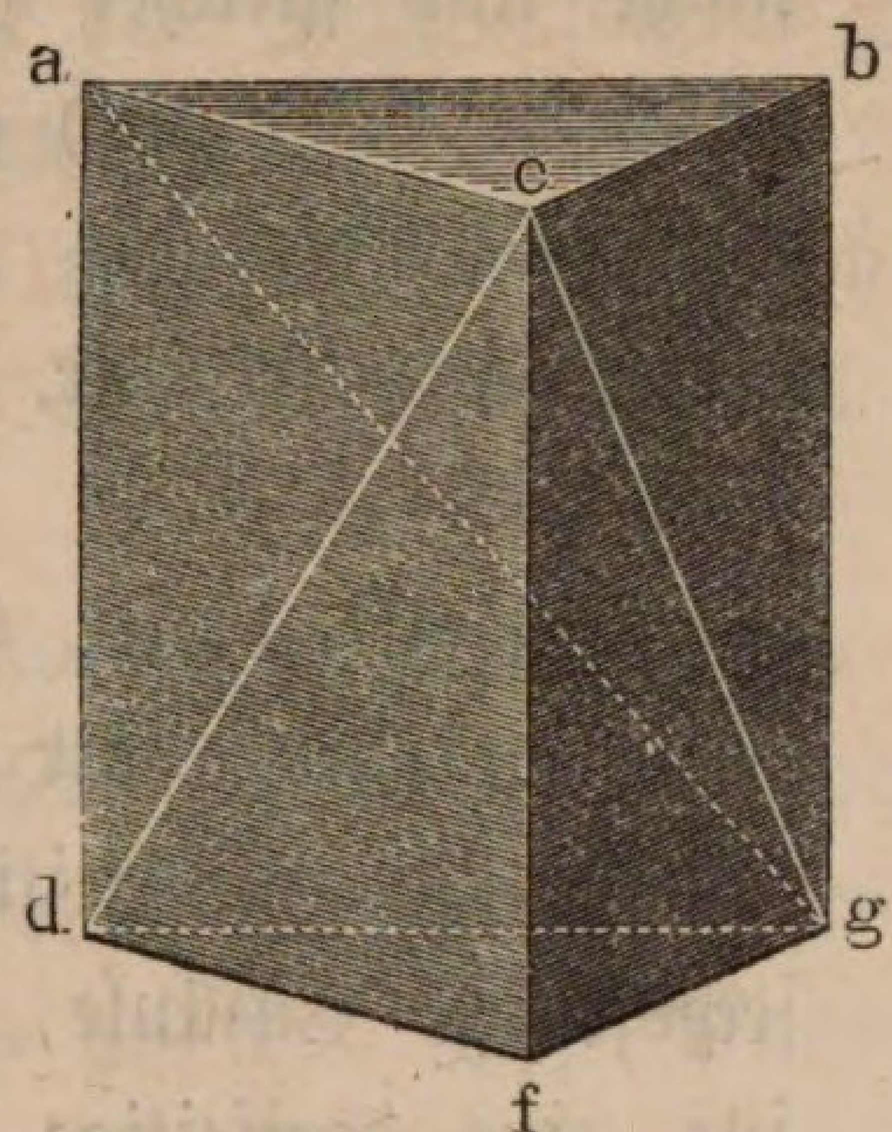
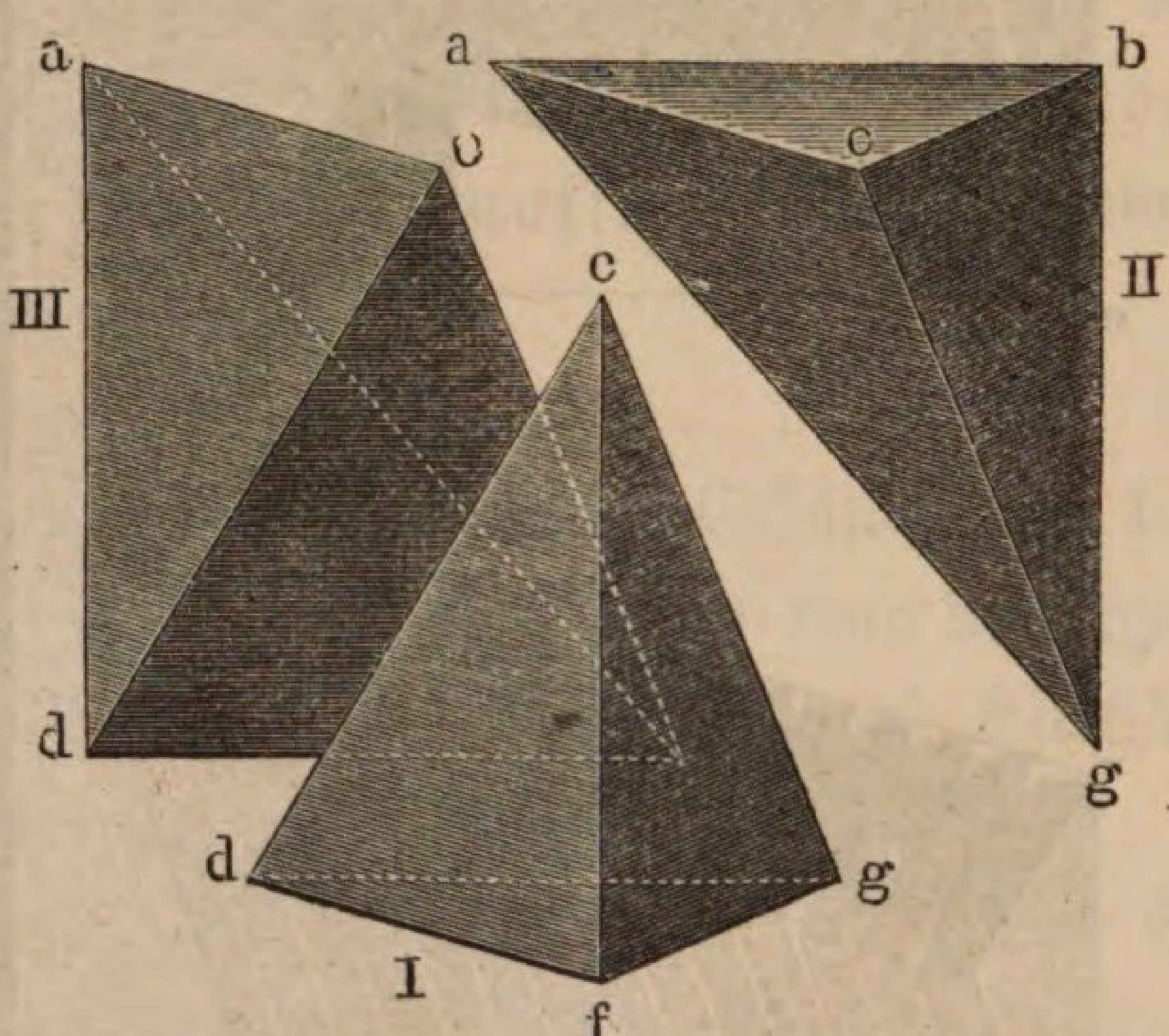


Fig. 142.



auseinander gerückt gezeichnet und mit I, II und III bezeichnet sind. Die Pyramiden I und II haben gleichen Körperinhalt, denn die Grundfläche *dfg* der einen ist gleich der Grundfläche *abc* der anderen, und ferner ist die Höhe *fc* gleich der Höhe *bg*.

Daß aber auch I gleich III ist, ergiebt sich, wenn man *acd* als die Grundfläche der Pyramide III, *cdf* aber als Grundfläche der Pyramide I betrachtet. Für diesen Fall ist *g*, Fig. 141, die gemeinschaftliche Spitze der beiden Pyramiden, und das von *g* auf die gegenüberstehende Fläche *acfd* gefällte Perpendikel ihre gemeinschaftliche Höhe; die Pyramiden I und III haben also gleiche Grundflächen und gleiche Höhe, folglich ist auch ihr Körperinhalt gleich.

Die drei Pyramiden I, II und III haben also gleichen Körperinhalt, und da sie zusammen die Ecksäule Fig. 141 bilden, so ist der Inhalt einer jeden derselben $1/3$ von dem Inhalte dieser Ecksäule.

Bezeichnen wir mit *g* die Grundfläche, mit *h* die Höhe der Ecksäule

Fig. 141, so ist der Körperinhalt derselben gh, folglich der Körperinhalt V einer jeden der drei Pyramiden Fig. 142

$$V = \frac{gh}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

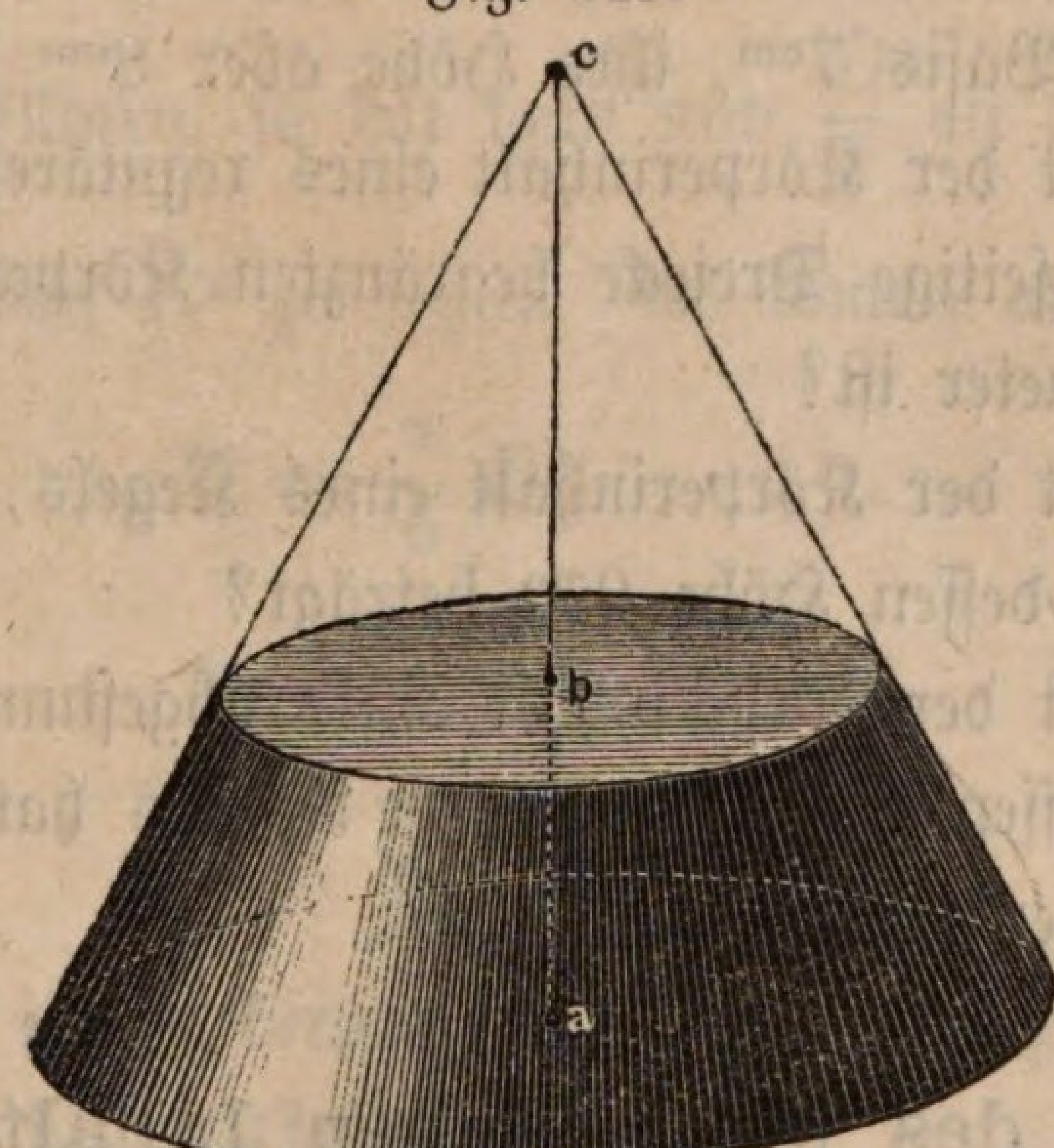
d. h. in Worten: man findet den Körperinhalt einer Pyramide, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und das so erhaltene Product mit 3 dividirt.

Obige Gleichung (1) gilt natürlich auch zur Berechnung des Körperinhalts von Kegeln.

Der Kubikinhalt eines abgestumpften Kegels ergiebt sich in folgender Weise.

Es sei R der Radius der Basis, r der Radius des obern Gränzkreises des abgestumpften Kegels, Fig. 143, und H die Höhe ab desselben,

Fig. 143.



während wir mit h die Höhe bc des abgeschnittenen Kegelstücks bezeichnen wollen. Für den Kubikinhalt des abgestumpften Kegelstückes haben wir offenbar

$$V = \frac{\pi R^2 (H + h)}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wir haben aber auch

$$R : H + h = r : h$$

und daraus

$$h = \frac{Hr}{R - r}$$

und

$$H + h = \frac{HR}{R - r}$$

werden diese Werthe von h und $H+h$ in Gleichung 2 gesetzt, so kommt nach Durchführung der nöthigen Reductionen

$$V = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r}$$

oder endlich

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aufgaben.

1 Wie groß ist der Körperinhalt einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge 2″, deren Höhe aber 3″ ist?

2. Wie groß ist der Körperinhalt einer quadratischen Pyramide, wenn jede Seite der Basis 7^{cm}, ihre Höhe aber 8^{cm} ist?

3. Wie groß ist der Körperinhalt eines regulären Tetraëders, d. h. eines durch drei gleichseitige Dreiecke begränzten Körpers, wenn die Länge jeder Kante 5 Centimeter ist?

4. Wie groß ist der Körperinhalt eines Kegels, dessen Grundfläche 5^{cm} Radius hat und dessen Höhe 9^{cm} beträgt?

5. Wie groß ist der Körperinhalt eines abgestumpften Kegels, dessen untere Fläche 8^{cm}, dessen obere Fläche 5^{cm} Radius hat, während die obere Endfläche 4^{cm} über der untern liegt?

68 **Berechnung des körperlichen Inhalts einer Kugel.** Denken wir uns die ganze Oberfläche der Kugel in eine möglichst große Anzahl unter einander gleicher Flächenstückchen getheilt, die man aber ihrer Kleinheit wegen als eben betrachten kann (die Anzahl dieser Flächenstückchen sei mit n, die Oberfläche eines jeden sei mit o bezeichnet), so kann man jedes derselben als Basis einer Pyramide betrachten, deren Spitze in dem Mittelpunkte der Kugel liegt. Die Höhe einer solchen Pyramide ist dann natürlich gleich R, wenn wir mit R den Radius der Kugel bezeichnen; der Inhalt eines solchen Pyramidchen ist also

$$\frac{oR}{3}.$$

Der Inhalt der Kugel besteht aber aus n solcher Pyramidchen, da jedem der n Flächenstückchen, in welche wir uns die Kugeloberfläche ge-

theilt dachten, ein solches im Mittelpunkte der Kugel gipfelndes Pyramidchen entspricht. Der Inhalt V der Kugel ist demnach

$$V = \frac{n o R}{3},$$

da aber $n.o$ die Gesammtoberfläche der Kugel ist, so haben wir für $n.o$ zu setzen $4 \pi R^2$ (§. 63), mithin haben wir für den Inhalt der Kugel

$$V = {}^4/_3 \pi R^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder, wenn wir für π seinen Zahlenwerth bis auf vier Decimalstellen genau setzen,

$$V = 4{,}1887\, R^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wofür man

$$V = 4{,}2\, R^3$$

setzen kann, wenn weniger Genauigkeit erforderlich ist.

Will man statt des Halbmessers R den Durchmesser D der Kugel in die Formeln einführen, so hat man nun $\frac{D}{2}$ an die Stelle von R, also $\frac{D^3}{8}$ an die Stelle von R^3 zu setzen. Es kommt alsdann

$$V = \frac{\pi}{6} D^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

oder

$$V = 0{,}5236\, D^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Aufgaben.

1. Wie groß ist der körperliche Inhalt der Kugeln, auf welche sich die Aufgaben in §. 63 beziehen?

2. Der Körperinhalt einer Kugel ist 3 Kubikcentimeter, wie groß ist ihr Radius?

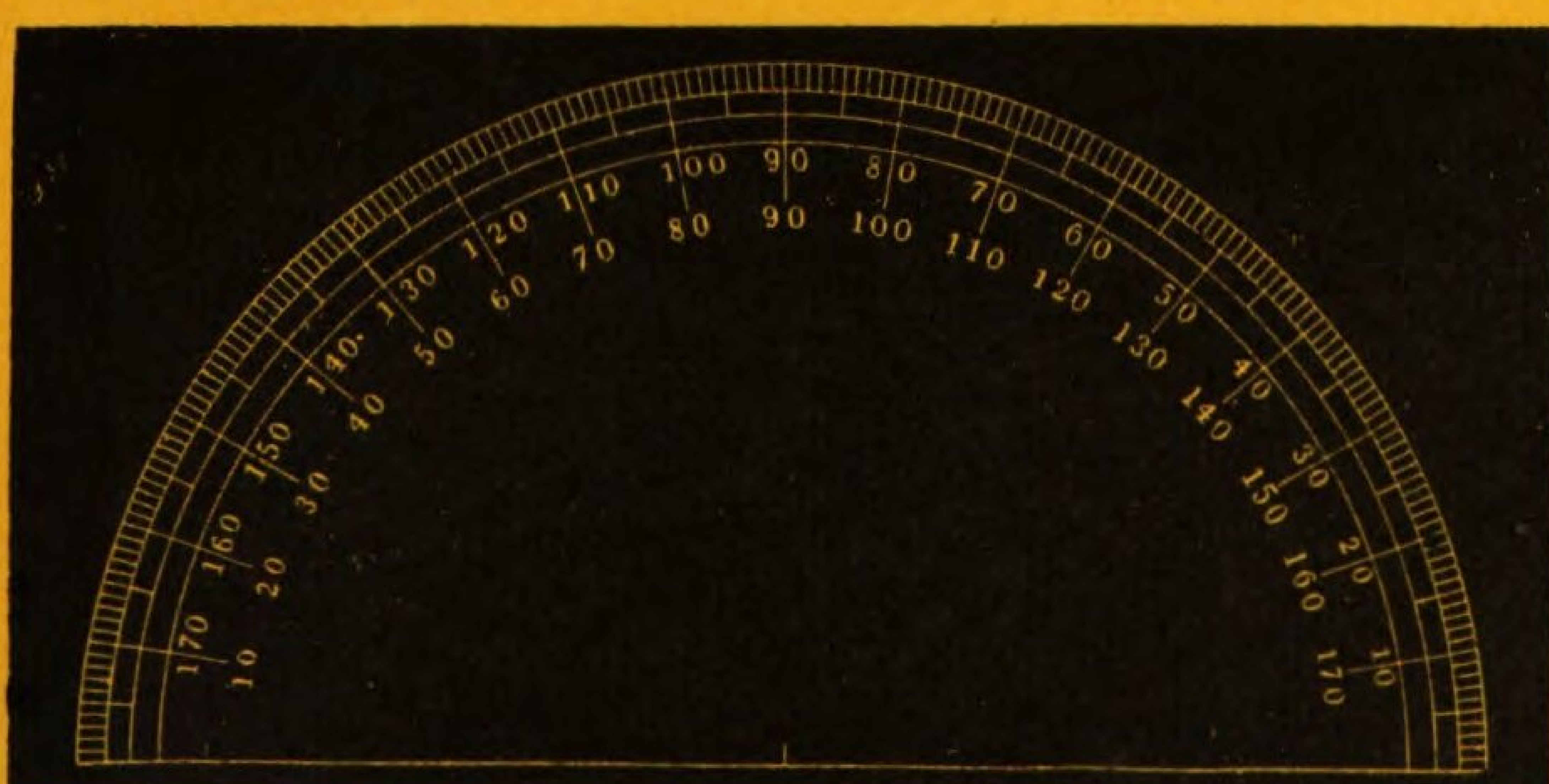
3. Wie viel Centimeter beträgt der Radius einer 6 pfündigen und einer 12 pfündigen Kanonenkugel? (Das specif. Gewicht des Gußeisens ist 7,2.)

Alphabetisches Sachregister.









Müller, Johann Heinrich Jacob, 1809-1875

Anfangsgründe der geometrischen Disciplinen für Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen, sowie auch zum Selbstunterricht ; in drei Theilen

Bd.: 1

Braunschweig 1869